128

128

Р А Д И О Т Е Х Н И К А

1991

№ 6

Обработка сигналов

УДК 621.391

Оценка частоты радиоимпульса с неизвестным временем прихода

А. П. Трифонов, А. В. Захаров

Выполнены синтез и анализ двух алгоритмов оценки частоты гауссовского случайного импульса; получена зависимость дисперсии оценки от ошибок синхронизации.

Во многих прикладных задачах статистической радиотехники необходимо производить измерение несущей частоты или доплеровского смещения частоты флуктуирующих радиоимпульсов [1—3]. При гауссовских флуктуациях радиосигнала эта задача сводится к оценке смещения центральной частоты спектра мощности отрезка реализации центрированного гауссовского случайного процесса

$$s(t, \nu_0)=\begin{cases}a(t)\cos[(\omega_0+\nu_0)t+\varphi(t)], & \lambda_0<t<\lambda_0+\tau;\\ 0, \ t\leqslant\lambda_0; \ t\geqslant\lambda_0+\tau, \end{cases} \tag{1}$$

принимаемого в течение времени $[0;\ T]$ на фоне гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0.

Оценка частоты случайного радиоимпульса исследовалась в [2, 3] в предположении, что время прихода λ_0 радиоимпульса (1) априори известно. Ц е л ь р а б о т ы — *синтез и анализ алгоритмов оценки частоты ν_0 радиоимпульса (1) с учетом возможного незнания времени его прихода λ_0.*

Спектр мощности стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)=a(t)\cos[(\omega_0+\nu)t+\varphi(t)]$ запишем как [1]

$$G(\omega,\ \nu)=\frac{G_0}{2}\left[f\left(\frac{\omega_0-\omega+\nu}{\theta}\right)+f\left(\frac{\omega_0+\omega+\nu}{\theta}\right)\right],$$

где $f(x)$ определяет форму спектра мощности и нормирована так, что

$$\max f(x)=1,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx=1,$$

$$\theta=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega,\ \nu)d\omega/[2\max G^2(\omega,\ \nu)] -$$

эквивалентная полоса частот сигнала (1).

Будем считать, что неизвестное смещение частоты ν_0 распределено равновероятно на интервале $[-\Omega/2;\ \Omega/2]$ и что $\theta\ll\omega_0$, $\Omega\ll\omega_0$. Обозначим $\mu=\tau\theta/(2\pi)$ и рассмотрим оценку смещения частоты ν_0 при $\mu\gg1$.

Предположим, что имеется независимый от наблюдаемой реализации $x(t)$ канал синхронизации, на выходе которого формируется синхроимпульс с длительностью τ и временем прихода $\hat\lambda$. Принимая в качестве истинного значения λ_0 время прихода $\hat\lambda$ синхроимпульса, найдем оценку максимального правдоподобия $\hat\nu$ частоты ν_0. Член логарифма функционала отношения правдоподобия, зависящий от неизвестной частоты, при $\mu\gg1$ можно представить в виде [2, 4]

$$M_1(\nu)=\frac{1}{2}\int\limits_{\hat\lambda}^{\hat\lambda+\tau} y^2(t,\ \nu)dt, \tag{2}$$

где $y(t,\ \nu)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $H(\mathrm{i}\ \omega,\ \nu)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$, причем

$$|H(\mathrm{i}\ \omega,\ \nu)|^2=2G(\omega,\ \nu)/\{N_0[N_0/2+G(\omega,\ \nu)]\}. \tag{3}$$

При фиксированном значении $\hat\lambda$ радиоимпульса (1) оценка неизвестной частоты ν_0 определяется как [2—4] $\hat\nu=\arg\sup\limits_{\nu} M_1(\nu)$. Эту оценку можно получить с помощью многоканального измерителя рис. 1, где *1* — ключ, который открывается синхроимпульсом на время $[\hat\lambda;\ \hat\lambda=\tau]$; $H_i,\ i=1,\ n,$ — набор фильтров с передаточными функциями $H(\mathrm{i}\ \omega,\ \nu_i)$ (3); *2* — квадраторы; *3* — интеграторы; *4* — решающее устройство, которое определяет номер i канала с наибольшим выходным сигналом интегратора. Центральные частоты ν_i фильтров H_i обычно располагают равномерно на интервале $[-\Omega/2;\ \Omega/2]$.

Вследствие неизбежного наличия помех в канале синхронизации обычно $\hat\lambda\neq\lambda_0$. Выясним в какой степени ошибки синхронизации влияют на точность оценки частоты $\hat\nu$. При этом число каналов n в измерителе полагаем настолько большим, что потерями в точности оценки частоты, обусловленными дискретным изменением аргумента логарифма функционала отношения правдоподобия (2) можно пренебречь [2, 4]. Аналогично [2, 4] для (2) справедливо представление $M_1(\nu)=S(\nu-\nu_0)+N(\nu)+C$, где $C=\mu q\int\limits_{\infty}^{\infty} f(x)[1+qf(x)]^{-1}dx$ — несущественная постоянная $(q=G_0/N_0)$.

Сигнальная функция

$$S(\nu)=\mu q^2(1-\delta_\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)f(x-l)dx}{1+qf(x)}\qquad \text{при}\ \delta_\lambda<1 \tag{4}$$

и $S(\nu)=0$ при $\delta_\lambda\geqslant 1$, где $l=\nu/\theta$; $\delta_\lambda=|\hat\lambda-\lambda_0|/\tau$ — относительная погрешность синхронизации.

Шумовую функцию $N(\nu)$ при $\mu\gg 1$ можно считать реализацией центрированного гауссовского случайного процесса [1, 2] с корреляционной функцией

$$K(\nu_1,\ \nu_2)=\langle N(\nu_1)N(\nu_2)\rangle=\mu q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+l_1)f(x+l_2)[1+qf(x+l_0)]^2dx}{[1+qf(x+l_1)][1+qf(x+l_2)]}-$$

$$-\delta_\lambda\mu q^3\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+l_0)[2+qf(x+l_0)]f(x+l_1)f(x+l_2)dx}{[1+qf(x+l_1)][1+qf(x+l_2)]} \tag{5}$$

при $\delta_\lambda<1$ и

$$K(\nu_1,\ \nu_2)=\mu q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)f(x+l_1-l_2)dx}{[1+qf(x)][1+qf(x+l_1-l_2)]} \tag{6}$$

при $\delta_\lambda\geqslant 1$, где $l_i=\nu_i/\theta,\ i=0,\ 1,\ 2.$

Когда $\delta_\lambda<1$, сигнальная функция (4) достигает максимума при $\nu=\nu_0$. Если к тому же $\mu\gg 1$, то оценка $\hat\nu$ будет несмещенной, а дисперсия оценки

$$D(\hat\nu)=\frac{\partial^2K(\nu_1,\ \nu_2)}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\left[\frac{\partial^2S(\nu-\nu_0)}{\partial\nu^2}\right]^{-2}\Bigg|_{\nu_1=\nu_2=\nu=\nu_0} \tag{7}$$

Подставляя (4), (5) в (7), получаем

$$D(\hat\nu)=D(\nu_m)(1-\delta_\lambda\gamma_1/\gamma)/(1-\delta_\lambda)^2, \tag{8}$$

где

$$D(\nu_m)=\theta^2/(\mu q^2\gamma) \tag{9}$$

— дисперсия оценки максимального правдоподобия частоты радиоимпульса с априори известным временем прихода [2—4];

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2 [1+qf(x)]^{-2} dx;$$

$$\gamma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2 qf(x) [2+qf(x)] [1+qf(x)]^{-4} dx.$$

При $q \ll 1$ формула (8) принимает вид

$$D(\hat{\nu}) = D(\nu_m)/(1-\delta_\lambda)^2, \tag{10}$$

а при $q \gg 1$

$$D(\hat{\nu}) = D(\nu_m)/(1-\delta_\lambda). \tag{11}$$

Формулы (8), (10), (11) позволяют определить потери в точности оценки частоты при $\delta_\lambda < 1$ за счет ошибок синхронизации. Когда $\delta_\lambda \geqslant 1$, функция (4) обращается в нуль и оценка определяется как положение наибольшего максимума реализации шумовой функции $N(\nu)$. Как отмечалось, при $\delta_\lambda \geqslant 1$ шумовая функция представляет собой реализацию стационарного случайного процесса с корреляционной функцией (6). Следовательно, оценка $\hat{\nu}$ распределена равновероятно в интервале $[-\Omega/2;\ \Omega/2]$ и обладает безусловным рассеянием $V(\hat{\nu}) = \langle (\hat{\nu}-\nu_0)^2 \rangle = \Omega^2/6$, которое представляет собой дисперсию разности двух независимых равновероятно распределенных случайных величин $\hat{\nu}$ и ν_0 [2].

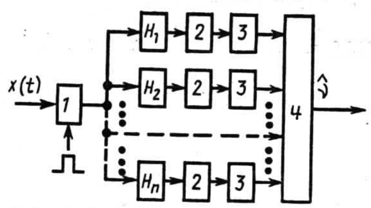

Рис. 1

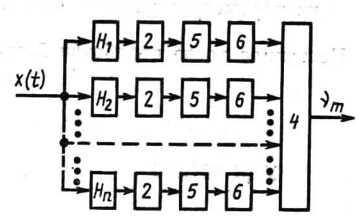

Рис. 2

Если не удается обеспечить высокую точность синхронизации, то при $\mu \gg 1$ целесообразно исключить влияние неизвестного времени прихода радиоимпульса (1) на оценку его частоты ν_0. Для этого, согласно [2], максимизируем по λ логарифм функционала отношения правдоподобия. Получаем, что оценка максимального правдоподобия частоты ν_0 радиоимпульса (1) при неизвестном времени его прихода

$$\nu_m = \arg \sup_{\nu} M(\nu), \tag{12}$$

где $M(\nu) = \sup\limits_{\lambda} \int_{\lambda}^{\lambda+\tau} y^2(t,\ \nu) dt,\ \lambda \in [0;\ T]$.

Оценку (12) можно получить с помощью многоканального измерителя, показанного на рис. 2, где *5* — фильтры, согласованные с прямоугольным импульсом $\Psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ 0, & t < 0;\ t > \tau; \end{cases}$ *6* — пиковые детекторы (остальные обозначения, как на рис. 1).

Используя метод локально-марковской аппроксимации, можно аналогично [5] найти характеристики оценки (12), асимптотически точные при $\mu \to \infty$. Формулы для характеристик оценки (12) довольно громоздки и неудобны для конкретных расчетов. Анализ этих формул показывает, что при $\mu \gg 1$, т. е. при больших отношениях сигнал-шум, характеристики оценки (12) практически совпадают с характеристиками оценки максимального правдоподобия частоты радиоимпульса (1) при априори известном времени прихода. Действительно, когда $\mu \gg 1$ и, следовательно, отношение сигнал-шум достаточно велико, вероятность аномальных ошибок оценивания пренебрежимо мала, что обеспечивает высокую апостериорную точность оценки (12). Известно [2], что в условиях высокой апостериорной точности совместные оценки частоты и времени прихода радиоимпульса без внутриимпульсной частотной модуляции некоррелированы и их характеристики совпадают с характеристиками раздельных оценок [2, 5]. Поэтому оценку (12) в первом приближении можно считать несмещенной и обладающей дисперсией (9). Следовательно в условиях высокой апостериорной точности незнание времени прихода радиоимпульса (1) не влияет на точность оценки максимального правдоподобия частоты радиосигнала, а приводит лишь к несколько более сложной структуре измерителя на рис. 2 по сравнению с измерителем на рис. 1.

● Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между двумя измерителями в зависимости от погрешностей канала синхронизации, а также от требований, предъявляемых к точности оценки частоты и к степени простоты технической реализации измерителя.

Литература

1. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника.— М.: Радио и связь, 1982.
2. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметра сигналов на фоне помех.— М.: Сов. радио, 1978.
3. *Трифонов А. П., Енина Е. П.*— Радиотехника, 1983, № 8.
4. *Куликов Е. И.* Методы измерения случайных процессов.— М.: Радио и связь, 1986.
5. *Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех.— М.: Радио и связь, 1986.

Поступила после доработки 2 августа 1990 г.

УДК 621.391

Оптимальная аппроксимация реализаций случайных процессов локальными сплайнами

Ю. В. Захаров

Синтезированы оптимальные весовые коэффициенты для аппроксимации реализаций стационарных случайных процессов локальными сплайнами; на примере случайных процессов со спектральными плотностями Баттерворта различных порядков исследована эффективность оптимальных и квазиоптимальных локальных сплайнов степени $n=1, 2, 3$.

Во многих приложениях цифровой обработки сигналов применяются методы сплайн-аппроксимации. Практически удобны локальные сплайны, построение которых требует небольших вычислительных затрат. Локальный сплайн степени n можно записать в виде

$$x_n(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_n(t-iT), \tag{1}$$

где $B_n(t)$ — B-сплайн степени n [1];

$$c_i=\sum_{k=-L}^{L} a_k x(iT-kT); \tag{2}$$

$x(t)$ — аппроксимируемый сигнал; T — интервал дискретизации (a_k — весовые коэффициенты).

B-сплайн степени n образуется в результате n-кратной свертки B-сплайна нулевой степени

$$B_0(t)=\begin{cases} 1, & |t|<T/2; \\ 0, & |t|\geqslant T/2. \end{cases}$$

В случае $n=1$, 2, 3 B-сплайны можно записать в виде