

341  
Том 59, № 12  
декабрь 2016

341  
ISSN 0021-3470

# РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ИЗВЕСТИЯ  
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ  
ЗАВЕДЕНИЙ



ИЗДАНИЕ  
НАЦИОНАЛЬНОГО  
ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
УКРАИНЫ  
«КИЕВСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ»

УДК 621.391

## ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ФОНА\*

ТРИФОНОВ А. П., МИЛОГОРОДСКИЙ А. А.

*Воронежский государственный университет,  
Россия, Воронеж, 394006, Университетская пл., д. 1*

**Аннотация.** Выполнены синтез и анализ квазиравдоподобного и асимптотически максимально правдоподобного алгоритмов оценки длительности. Найдены потери в точности оценок вследствие априорного незнания интенсивности фона.

**Ключевые слова:** квазиравдоподобия оценка; асимптотическая оценка максимального правдоподобия; рассеяния оценок; априорная параметрическая неопределенность

Модель оптического импульса с прямоугольным профилем интенсивности используется во многих приложениях оптической связи и локации [1–7]. Рассмотрим оценку неизвестной длительности оптического импульса с прямоугольным профилем интенсивности при наличии пуассоновского фона. В [7] исследована оценка длительности оптического импульса с априори неизвестной интенсивностью, но при априори известной интенсивности фона. Здесь, в отличие от [7] полагается, что интенсивность импульса априори известна, но априори неизвестна интенсивность пуассоновского фона. Считаем, что на интервале времени  $[0, T]$  наблюдается реализация пуассоновского процесса  $\pi(t)$  с интенсивностью

$$\lambda(t) = \beta s(t) + \alpha_0,$$

$$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t < 0, t > \tau_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha_0$  — неизвестная интенсивность фона,  $\beta$  — априори известная интенсивность импульса,  $\tau_0$  — неизвестная длительность импульса, которая может принимать значения из интервала  $[T_1, T_2]$ , причем  $0 < T_1 < T_2 < T$ . Если известна интенсивность фона  $\alpha_0$ , то для оценки длительности импульса  $\tau_0$  возможно использовать метод максимального правдоподобия [8], согласно которому оценка длительности определяется как положение наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР).

Выражение для логарифма ФОР [9] имеет вид

$$L_0(\tau) = \pi_\tau \ln(1 + \beta / \alpha_0) - \beta\tau, \quad (2)$$

---

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10022).

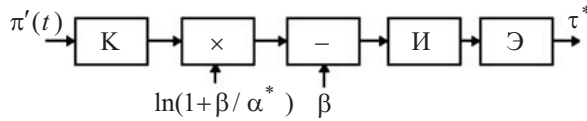


Рис. 1

где  $\pi_\tau = \int_0^\tau d\pi(t)$ . Соответственно, оценка максимального правдоподобия (ОМП) определяется как:

$$\tau_{om} = \operatorname{argsup} L_0(\tau), \quad \tau \in [T_1, T_2]. \quad (3)$$

Однако при неизвестных длительности  $\tau_0$  и интенсивности фона  $\alpha_0$  логарифм ФОП зависит от двух неизвестных параметров:

$$L(\tau, \alpha) = \pi_\tau \ln(1 + \beta / \alpha) - \beta\tau. \quad (4)$$

При подстановке в это выражение вместо неизвестной интенсивности фона  $\alpha$  некоторых ее значений, получаем ряд алгоритмов оценки длительности оптического импульса, возможно неоптимальных. Подставляемые значения интенсивности фона могут быть фиксированными или определяться по реализации наблюдаемых данных. Получаемые в результате алгоритмы оценки отличаются своей эффективностью и степенью простоты аппаратной или программной реализации.

Одним из способов преодоления априорной параметрической неопределенности относительно интенсивности фона является применение квазиправдоподобной оценки (КПО) [10]. Для получения КПО необходимо заменить значение неизвестного неинформативного параметра на некоторую его предполагаемую величину.

Поскольку априори интенсивность  $\alpha_0$  неизвестна, используем в (2) вместо  $\alpha_0$  его предполагаемое значение  $\alpha^*$ . Тогда вместо логарифма ФОП (2) формируется решающая статистика

$$L^*(\tau) = \pi_\tau \ln(1 + \beta / \alpha^*) - \beta\tau. \quad (5)$$

Оценка, определяемая по положению наибольшего максимума решающей статистики (5), является КПО [10]

$$\tau^* = \operatorname{argsup} L^*(\tau), \quad \tau \in [T_1, T_2]. \quad (6)$$

Очевидно что при  $\alpha^* = \alpha_0$  КПО (6) совпадает с ОМП (3).

КПО длительности реализуется с помощью устройства, блок-схема которого показана на рис. 1. Последовательность коротких импульсов  $\pi'(t)$  поступает на измеритель, на входе которого расположен ключ К, открывающийся на время анализа  $[0, T]$ . Сигнал с выхода ключа поступает на перемножитель, на второй вход которого подается величина, пропорциональная  $\ln(1 + \beta / \alpha^*)$ . Сигнал с выхода перемножителя подается на вычитающее устройство, на второй вход которого подается предполагаемое значение интенсивности импульса  $\beta$ . Сигнал с выхода вычитающего устройства поступает на интегратор И, где интегрируется в интервале от 0 до  $t \in [0, T]$ . В результате, на его выходе формируется решающая статистика  $L^*(t)$  (5) как функция текущего времени, которая подается на экстрематор Э. Он определяет положение наибольшего максимума решающей статистики при  $t \in [T_1, T_2]$ , т. е. момент времени  $\hat{t} = \tau^*$  (6), при котором решающая статистика максимальна.

Найдем характеристики КПО (6). Для этого представим (5) в виде суммы [8] сигнальной (регулярной) и шумовой (помеховой) составляющих:

$$L^*(\tau) = S(\tau) + N(\tau),$$

где  $S(\tau) = \langle L^*(\tau) \rangle$ ,  $N(\tau) = L^*(\tau) - \langle L^*(\tau) \rangle$ .

Выполняя усреднение по реализациям наблюдаемого процесса  $\pi(t)$  для сигнальной функции получаем выражение:

$$S(\tau) = \beta \min(\tau, \tau_0) \ln(1 + q / \chi) -$$

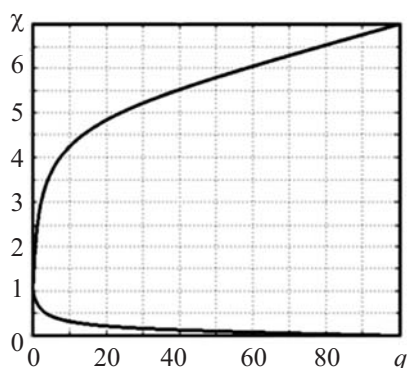


Рис. 2

$$-(\beta - \alpha_0 \ln(1 + q / \chi))\tau. \quad (7)$$

Аналогично для шумовой функции:

$$N(\tau) = (\pi_\tau - \langle \pi_\tau \rangle) \ln(1 + q / \chi), \quad (8)$$

где

$$q = \beta / \alpha_0 \quad (9)$$

— отношение сигнал–фон, а  $\chi = \alpha^* / \alpha_0$  характеризует отличие значения предполагаемой интенсивности фона, используемого для синтеза КПО (6), от истинного значения интенсивности фона.

Следуя [7] рассмотрим основные свойства сигнальной функции (7). Для этого найдем производные (7) по  $\tau$  справа и слева от истинного значения длительности  $\tau_0$ . Получаем, что сигнальная функция достигает максимума в точке  $\tau_0$ , если

$$a_1 = \left. \frac{dS}{d\tau} \right|_{\tau_0-0} = \alpha_0 [(1 + q) \ln(1 + q / \chi) - q] > 0, \quad (10)$$

$$a_2 = - \left. \frac{dS}{d\tau} \right|_{\tau_0+0} = \alpha_0 [q - \ln(1 + q / \chi)] > 0. \quad (11)$$

Найдем условие состоятельности оценки (6). Для того, чтобы оценка была состоятельна, необходимо чтобы сигнальная функция (7)

достигала максимума в точке  $\tau_0$  [8], т.е. выполнялись неравенства (10), (11). Анализ этих неравенств показывает, что они выполняются, если для некоторого  $q$  имеем

$$\chi_{\min}(q) \leq \chi \leq \chi_{\max}(q). \quad (12)$$

Зависимости  $\chi_{\min}(q)$  и  $\chi_{\max}(q)$  показаны на рис. 2. Видно, что интервал допустимых значений величины  $\chi$  (12) возрастает с увеличением  $q$  (9). Так, например при  $q = 10$ ,  $\chi_{\min} = 0,25$ ,  $\chi_{\max} = 4,25$ .

Используя выражение для шумовой функции (8), найдем корреляционную функцию шумовой функции:

$$\begin{aligned} K(\tau_1, \tau_2) &= \langle N(\tau_1)N(\tau_2) \rangle = \\ &= \langle [(\pi_{\tau_1} - \langle \pi_{\tau_1} \rangle)(\pi_{\tau_2} - \langle \pi_{\tau_2} \rangle)] \ln^2(1 + \beta / \alpha^*) \rangle = \\ &= \alpha_0 (q \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \min(\tau_1, \tau_2)) \times \\ &\quad \times \ln^2(1 + q / \chi). \end{aligned} \quad (13)$$

Введем в рассмотрение отношение сигнал–шум (ОСШ) на выходе устройства обработки [8]:

$$z^2 = \frac{S^2(\tau_0)}{\langle N^2(\tau_0) \rangle} = \frac{\mu_S [(1 + q) \ln(1 + q / \chi) - q]^2}{q(1 + q) \ln^2(1 + q / \chi)}, \quad (14)$$

где  $\mu_S = \beta \tau_0$  — среднее число сигнальных точек на интервале длительности импульса. В дальнейшем ОСШ (14) предполагается достаточно большим, так что оценка обладает высокой апостериорной точностью [8].

Для нахождения характеристик КПО (6) исследуем статистические свойства решающей статистики (5). Вычислим аналогично [7], коэффициенты асимметрии, эксцесса [11] решающей статистики (5) и исследуем поведение корреляционной функции (13) шумовой функции (8). Получаем, что решающая статистика (5) при больших

$$\mu_0 = (\alpha_0 + \beta)\tau_0 \quad (15)$$

в малой окрестности  $\tau_0$  аппроксимируется гауссовским марковским процессом [12].

Следовательно, характеристики оценки, т.е. характеристики положения наибольшего максимума этого гауссовского марковского процесса возможно найти используя решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [13].

Для этого найдем коэффициенты сноса и диффузии решающей статистики (5), которые для гауссовского процесса имеют вид [6]:

$$A = \left. \frac{dS(\tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0} + \frac{[L^* - S(\tau)]}{K(\tau, \tau)} \left. \frac{\partial K(\tau, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0},$$

$$B = \left. \frac{dK(\tau_1, \tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0} - 2 \left. \frac{\partial K(\tau, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0}. \quad (16)$$

Подставляя (5), (7), (13) в (16) и выполняя дифференцирование, получаем выражения для коэффициентов сноса и диффузии:

$$A = \begin{cases} a_1, & \tau < \tau_0, \\ -a_2, & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (17)$$

$$B = \begin{cases} \alpha_0(1+q)\ln^2(1+q/\chi) = b_1, & \tau < \tau_0, \\ \alpha_0 \ln^2(1+q/\chi) = b_2, & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (18)$$

В результате решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в [13] найдены значения смещения и рассеяния оценки в общем виде:

$$b = \langle \tau^* - \tau_0 \rangle = \Delta \frac{z_1^2 R(R+2) - z_2^2(2R+1)}{z_1^2 z_2^2 (R+1)^2}, \quad (19)$$

$$V = \langle (\tau^* - \tau_0)^2 \rangle =$$

$$= 2\Delta^2 \frac{z_1^4 R(2R^2 + 6R + 5) + z_2^4 (5R^2 + 6R + 2)}{z_1^4 z_2^4 (R+1)^3}, \quad (20)$$

где  $\Delta = T_2 - T_1$ ,  $z_1^2 = 2a_1^2 \Delta / b_1$ ,  $z_2^2 = 2a_2^2 \Delta / b_2$ ,  $R = a_1 b_2 / a_2 b_1$ .

Используя обозначения (17), (18) находим, что выражения для смещения (19) и рассеяния (20) оценки (6) принимают вид:

$$b(\chi) = \frac{\ln^2(1+q/\chi)}{2\alpha_0(R+1)^2} \left[ \frac{R(R+2)}{\eta_2^2} - \frac{2R+1}{\eta_1^2} \right], \quad (21)$$

$$V(\chi) = \frac{\ln^4(1+q/\chi)}{2\alpha_0^2(R+1)^3} \times$$

$$\times \left[ \frac{R(2R^2 + 6R + 5)}{\eta_2^4} + \frac{5R^2 + 6R + 2}{\eta_1^4} \right],$$

где

$$R = \frac{(1+q)\ln(1+q/\chi) - q}{(1+q)(q - \ln(1+q/\chi))},$$

$$\eta_1 = \frac{(1+q)\ln(1+q/\chi) - q}{\sqrt{1+q}},$$

$$\eta_2 = q - \ln(1+q/\chi).$$

Выражения (21), (22) получены в [13] в предположении, что оценка состоятельна, т.е. с ростом ее точности она сходится к истинному значению параметра. Это имеет место при выполнении (10), (11).

Рассмотрим смещение и рассеяние оценки при  $\alpha^* = \alpha_0$ , когда КПО переходит в ОМП. Полагая в (21) и (22)  $\chi = 1$  получаем выражения для смещения и рассеяния ОМП (3) длительности импульса при априори известной интенсивности фона  $b_0 = b(\chi = 1)$ :

$$V_0 = V(\chi = 1). \quad (23)$$

Для того, чтобы охарактеризовать влияние отклонения предполагаемого значения интенсивности фона от истинного на точность КПО, введем в рассмотрение отношение рассеяний КПО и ОМП:

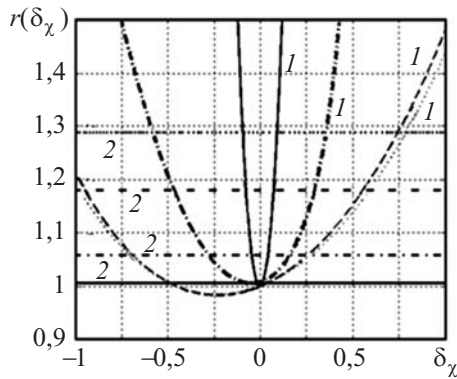


Рис. 3

$$r(\delta_\chi) = V(\chi) / V_0, \quad (24)$$

где  $V(\chi)$  определяется из (22),  $V_0$  из (23), а  $\delta_\chi = (\alpha^* - \alpha_0) / \alpha_0 = \chi - 1$  — относительное отклонение предполагаемого значения интенсивности фона от истинного.

На рис. 3 кривыми 1 показано отношение (24). Сплошной линией нанесена зависимость (24) при  $q = 0,1$ , штрихпунктирной —  $q = 0,5$ , штриховой —  $q = 1$  и пунктирной —  $q = 10$ . Из кривых 1 (рис. 3) следует, что априорное незнание интенсивности фона может привести к снижению точности КПО по сравнению с точностью ОМП. При этом с ростом  $q$  влияние априорного незнания интенсивности фона на точность КПО несколько снижается.

Таким образом, априорное незнание интенсивности фона  $\alpha$  может привести к проигрышу в точности оценки длительности. Уменьшить этот проигрыш возможно, если использовать метод максимального правдоподобия. Согласно этому методу [8] неизвестную интенсивность фона в (4) необходимо заменить на ее ОМП  $\hat{\alpha}$ .

ОМП  $\hat{\alpha}$  неизвестной интенсивности фона определяется как положение наибольшего максимума логарифма функционала плотности вероятности  $F(\tau, \alpha)$  пуассоновского процесса с интенсивностью (1), т. е.

$$\hat{\alpha} = \underset{\alpha}{\operatorname{argsup}} F(\tau, \alpha).$$

Согласно [9]

$$F(\tau, \alpha) = \pi_\tau \ln(\alpha + \beta) + (\pi_T - \pi_\tau) \ln \alpha - \beta\tau - \alpha T, \quad (25)$$

где  $\pi_T = \int_0^T d\pi(t)$ . Соответственно, уравнение правдоподобия имеет вид

$$[dF(\tau, \alpha) / d\alpha]_{\hat{\alpha}} = 0$$

или, после дифференцирования (25):

$$\frac{\pi_\tau}{\hat{\alpha} + \beta} + \frac{\pi_T - \pi_\tau}{\hat{\alpha}} - T = 0. \quad (26)$$

Установлено, что КПО длительности существенно проигрывает в точности ОМП при априори известной величине интенсивности фона  $\alpha$  только в случае, когда  $q$  мало ( $\beta \ll \alpha$ ). Поэтому, пренебрегая в знаменателе первого слагаемого в (26) величиной  $\beta$  для приближенного решения уравнения правдоподобия получаем:

$$\hat{\alpha} \cong \pi_T / T. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (4) находим

$$L(\tau) = L(\tau, \hat{\alpha}) = \pi_\tau \ln(1 + \beta T / \pi_T) - \beta\tau. \quad (28)$$

Следовательно, асимптотическая ОМП ( $q \rightarrow 0$ ) длительности оптического импульса при априори неизвестной интенсивности фона запишется как:

$$\tau_m = \operatorname{argsup} L(\tau), \quad \tau \in [T_1, T_2]. \quad (29)$$

Блок-схема измерителя, реализующего асимптотическую ОМП длительности импульса с неизвестной интенсивностью, представлена на рис. 4. Здесь обозначено:  $\ln$  — нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой  $y = \ln x$ , ЛЗ — линия задержки на время  $T$ , ГЛИН — генератор линейно изменяющегося напряжения, остальные обозначения соответствуют рис. 1.



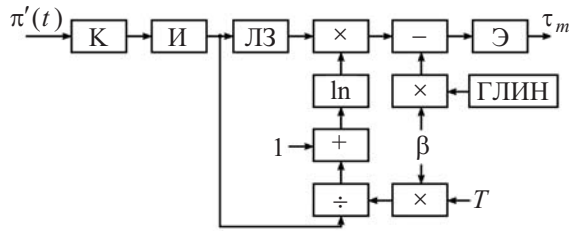


Рис. 4

Последовательность коротких импульсов  $\pi'(t)$  поступает на измеритель, на входе которого расположен ключ, открывающийся на время анализа  $[0, T]$ . Сигнал с выхода ключа поступает на интегратор И, где интегрируется в интервале от 0 до  $t \in [0, T]$ . Далее сигнал с выхода интегратора поступает на ЛЗ на время  $T$ . Кроме того, сигнал с интегратора поступает на делитель, на второй вход которого с выхода умножителя подается произведение  $\beta T$ . Далее сигнал с выхода делителя подается на сумматор, на второй вход которого подается постоянный сигнал, равный 1. Сигнал с ЛЗ поступает на умножитель, на второй вход которого поступает сигнал с логарифмического нелинейного преобразователя. Сигнал с выхода умножителя поступает на вычитающее устройство, на второй вход которого подается произведение  $\beta$  и сигнала с ГЛИН, пропорционального  $t - T$ . В результате, на выходе вычитающего устройства формируется решающая статистика  $L(t)$  (28), которая подается на экстрематор Э. Он определяет положение  $\hat{t}$  наибольшего максимума решающей статистики при  $t \in [T + T_1, T + T_2]$  и момент  $\tau_m = \hat{t} - T$  (29) при котором решающая статистика максимальна.

Найдем характеристики оценки (29). Для этого обозначим:

$$L_1(\tau) = \pi_\tau, \quad (30)$$

$$L_2 = \pi_T / \beta T. \quad (31)$$

Представим вспомогательные функции (30), (31) в виде суммы регулярной и шумовой составляющих  $L_1(\tau) = S_1(\tau) + N_1(\tau)$  и

$L_2 = S_2 + N_2$ . Здесь регулярная и шумовая составляющие имеют вид:

$$S_1(\tau) = \langle \pi_\tau \rangle, \quad (32)$$

$$N_1(\tau) = \pi_\tau - \langle \pi_\tau \rangle, \quad (33)$$

$$S_2 = \langle \pi_T \rangle / \beta T, \quad (34)$$

$$N_2 = (\pi_T - \langle \pi_T \rangle) / \beta T. \quad (35)$$

Выразим решающую статистику (28) через вспомогательные функции (29), (30). Получаем:

$$\begin{aligned} L(\tau) &= L_1(\tau) \ln[1 + 1/L_2] - \beta\tau = \\ &= [S_1(\tau) + N_1(\tau)] \ln[1 + 1/[S_2 + N_2]] = \\ &= S_1(\tau)[1 + \delta_1(\tau)] \left[ \ln[1 + S_2[1 + \delta_2]] - \right. \\ &\quad \left. - \ln[S_2[1 + \delta_2]] \right] - \beta\tau, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\delta_1(\tau) = N_1(\tau) / S_1(\tau), \quad (37)$$

$$\delta_2 = N_2 / S_2. \quad (38)$$

Подставив в (37), (38) выражения (32)–(35) получаем явный вид процессов (37), (38):

$$\delta_1(\tau) = \pi_\tau / \mu(\tau) - 1, \quad (39)$$

$$\delta_2 = \pi_T / \mu_T - 1, \quad (40)$$

где

$$\mu_T = \langle \pi_T \rangle = \alpha_0 T + \beta\tau_0. \quad (41)$$

Случайные функции (39), (40) имеют нулевые математические ожидания и средние квадраты:  $\langle \delta_1^2(\tau) \rangle = 1 / \mu(\tau)$ ,  $\langle \delta_2^2 \rangle = 1 / \mu_T$ . Следовательно, функции (39), (40) возможно считать малыми, если  $\mu(\tau) = \langle \pi_\tau \rangle = \beta \min(\tau, \tau_0) + \alpha_0 \tau$  и  $\mu_T$  (41) велики. При высокой апостериорной точности характеристики асимптотической ОМП (29) определяются поведением решающей статистики (28) в окрестности  $\tau_0$ . Очевид-

но  $\mu_T > \mu_0$  (15), поэтому, если  $\mu_0 \gg 1$ , то функции (39), (40) являются малыми.

Разложим решающую статистику в ряд по степеням (37), (38) и удержим только члены первого порядка малости. Получаем:

$$L(\tau) = S_1(\tau)[1 + \delta_1(\tau)] \left[ \ln[1 + S_2] + \delta_2 / [1 + S_2] - \ln S_2 - \delta_2 \right] - \beta\tau = S_1(\tau) \left[ \ln[1 + 1/S_2] - \delta_2 S_2 / [1 + S_2] + \delta_1(\tau)[1 + 1/S_2] \right] \quad (42)$$

Представим решающую статистику (42) в виде суммы сигнальной и шумовой функций  $L(\tau) = S_0(\tau) + N_0(\tau)$ , где сигнальная функция

$$S_0(\tau) = \mu(\tau) \ln[1 + \beta T / \mu_T] - \beta\tau, \quad (43)$$

а шумовая

$$N_0(\tau) = [\pi_\tau - \mu(\tau)] \ln[1 + \beta T / \mu_T] + [\pi_T - \mu_T] / [\beta T + \mu_T] \quad (44)$$

Найдем условие состоятельности оценки (29). Для того, чтобы оценка была состоятельна, сигнальная функция (43) должна достигать максимума в точке  $\tau_0$  [8]. Для этого необходимо, чтобы

$$a_{01} = \left. \frac{dS_0(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0-0} = \alpha_0 \left[ (1+q) \ln(1+q/[1+qy]) - q \right] > 0, \\ a_{02} = - \left. \frac{dS_0(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0+0} = \alpha_0 [q - \ln(1+q/[1+qy])] > 0,$$

где  $y = \tau_0 / T$ . Нетрудно убедиться, что эти условия выполняются при любых значениях  $q > 0$  и  $y < 0,5$ .

Используя выражение для шумовой функции (44), найдем ее корреляционную функцию

$$K_0(\tau_1, \tau_2) = \langle N_0(\tau_1), N_0(\tau_2) \rangle = \ln^2 [1 + \beta T / \mu_T] \times \\ \times [\beta \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \alpha_0 \min(\tau_1, \tau_2)] + \ln[1 + \beta T / \mu_T] [\mu(\tau_1) + \mu(\tau_2)] / [\beta T + \mu_T] + \mu_T / [\beta T + \mu_T]^2. \quad (45)$$

Введем в рассмотрение ОСШ на выходе приемника асимптотически максимального правдоподобия [8]:

$$z_0^2 = \frac{S_0^2(\tau_0)}{\langle N_0^2(\tau_0) \rangle} = \frac{\mu_S \mu_T [1 + q(1+y)]}{q(1+q)(1+qy)} \times \\ \times \left[ (1+q) \ln \left( 1 + \frac{q}{1+qy} \right) - q \right]^2 \times \\ \left[ \ln^2 \left( 1 + \frac{q}{1+qy} \right) + 2 \ln \left( 1 + \frac{q}{1+qy} \right) + \frac{1+qy}{1+q(1+y)} \right]^{-1}. \quad (46)$$

В дальнейшем ОСШ (46) предполагается достаточно большим, так что асимптотическая ОМП (29) обладает высокой апостериорной точностью [8]. Исследуя аналогично [7] статистические свойства решающей статистики (42), получаем, что при больших  $\mu_0$  (15) в малой окрестности  $\tau_0$  процесс (42) аппроксимируется асимптотически гауссовским марковским процессом.

Таким образом, установлено, что решающая статистика (42) при больших  $\mu_0$  (15) представляет собой асимптотически гауссовский марковский процесс. Следовательно, характеристики оценки, т.е. характеристики положения наибольшего максимума этого гауссовского марковского процесса возможно найти используя решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [13].

Подставляя (42), (43), (45) в (16) и выполняя дифференцирование получаем выражения для коэффициентов сноса и диффузии:



$$A = \begin{cases} a_{01}, & \tau < \tau_0, \\ -a_{02}, & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (47)$$

$$B = \begin{cases} \alpha_0(1+q) \ln^2[1+q/(1+qy)] = b_{01}, & \tau < \tau_0, \\ \alpha_0 \ln^2[1+q/(1+qy)] = b_{02}, & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (48)$$

В условиях высокой апостериорной точности для расчета характеристик асимптотической ОМП  $\tau_m$  необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации характеристик решающей статистики (42) в малой окрестности истинного значения параметра  $\tau_0$ . При этом точность аппроксимации характеристик решающей статистики за пределами этой окрестности не играет существенной роли [8].

Используя обозначения (47), (48) находим, что выражения для смещения (19) и рассеяния (20) оценки (29) принимают вид:

$$b_m = \frac{\ln^2[1+q/(1+qy)]}{2\alpha_0(R+1)^2} \left[ \frac{R(R+2)}{\eta_2^2} - \frac{2R+1}{\eta_1^2} \right], \quad (49)$$

$$V_m = \frac{\ln^4[1+q/(1+qy)]}{2\alpha_0^2(R+1)^3} \times \left[ \frac{R(2R^2+6R+5)}{\eta_2^4} + \frac{5R^2+6R+2}{\eta_1^4} \right], \quad (50)$$

где

$$R = \frac{(1+q) \ln[1+q/(1+qy)] - q}{(1+q)[q - \ln[1+q/(1+qy)]]},$$

$$\eta_1 = \frac{(1+q) \ln[1+q/(1+qy)] - q}{\sqrt{1+q}},$$

$$\eta_2 = q - \ln[1+q/(1+qy)].$$

Выражения (49), (50) получены в [13] в предположении, что оценка состоятельна, т. е. с ростом ее точности она сходится к истинно-

му значению параметра. Для оценки (29) это имеет место при любых  $q$  и  $y < 0,5$ .

Введем в рассмотрение отношение рассеяния асимптотической ОМП (29) и ОМП (3) при априори известной интенсивности фона

$$r_m = V_m / V_0, \quad (51)$$

где  $V_m$  определяется из (50), а  $V_0$  — из (23).

Очевидно, чем больше отношение (51), тем значительнее проигрыш в точности асимптотической ОМП при априори неизвестной интенсивности фона по сравнению с точностью ОМП при априори известной интенсивности фона. Значения отношения (51) показаны на рис. 3 горизонтальными линиями 2 при соответствующих кривым 1 значениях  $q$  и  $y = 0,3$ . Сопоставляя кривые 1 и 2 (рис. 3) возможно определить условия, при которых более точна КПО, а при каких — более точна асимптотическая ОМП.

Из сопоставления сплошных линий 1 и 2 следует, что при  $q = 0,1$ , для всех значений  $\delta_\chi$  асимптотическая ОМП обеспечивает более высокую точность, чем КПО. Из сопоставления пунктирных линий 1 и 2 следует, что при  $q = 10$  КПО обеспечивает более высокую точность, чем асимптотическая ОМП для всех значений  $\delta_\chi < 0,75$ .

Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между измерителями (рис. 1 и рис. 4) в зависимости от имеющейся априорной информации, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценок длительности и к степени простоты технической реализации измерителя.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шереметьев А. Г. Статистическая теория лазерной связи / А. Г. Шереметьев. — М. : Связь, 1971. — 264 с.
2. Волохатюк В. А. Вопросы оптической локализации / В. А. Волохатюк, В. М. Кочетков, Р. Р. Красовский — М. : Сов. радио, 1971. — 256 с.
3. Гальярди Р. М. Оптическая связь / Р. М. Гальярди, Ш. Карп. — М. : Связь, 1978. — 424 с.

4. Воробьев В. И. Оценка координат источника оптического излучения с прямоугольным профилем интенсивности / В. И. Воробьев // Оптико-механическая промышленность. — 1978. — № 4. — С. 14–16.

5. Воробьев В. И. Оптическая локация для радиоинженеров / В. И. Воробьев. — М. : Радио и связь, 1983. — 176 с.

6. Овчинникова Т. М. Обнаружение и оценка момента изменения неизвестной интенсивности пуассоновского потока. I / Т. М. Овчинникова, А. П. Трифонов // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 1. — С. 66–76. — Режим доступа : <http://mi.mathnet.ru/at24>.

7. Трифонов А. П. Оценка длительности оптического импульса с прямоугольным профилем интенсивности неизвестной высоты / А. П. Трифонов, А. А. Милогородский // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2016. — Т. 59, № 10. — С. 3–12. — DOI : [10.20535/S0021347016100010](https://doi.org/10.20535/S0021347016100010).

8. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Сов. радио, 1978. — 296 с.

9. Большаков И. А. Прикладная теория случайных потоков / И. А. Большаков, В. С. Ракошиц. — М. : Сов. радио, 1978. — 248 с.

10. Мудров В. И. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. — М. : Радио и связь, 1983. — 304 с.

11. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. — М. : Сов. радио, 1961. — 550 с.

12. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю. Г. Сосулин. — М. : Сов. радио, 1978. — 320 с.

13. Трифонов А. П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, М. Б. Беспалова // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 35–43. — Режим доступа : [http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=physmath&year=2014&num=04&f\\_name=2014-04-07](http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=physmath&year=2014&num=04&f_name=2014-04-07).

Поступила в редакцию 01.02.2016

После переработки 08.08.2016

---

---

## INFORMATION ON THE ARTICLE

ESTIMATION OF DURATION OF THE RECTANGULAR OPTICAL PULSE WITH UNKNOWN BACKGROUND INTENSITY\*

**Andrey P. Trifonov**, [trifonov@phys.vsu.ru](mailto:trifonov@phys.vsu.ru), Voronezh State University, Russian Federation

**Aleksandr A. Milogorodskii**, [milogorodskii@mail.ru](mailto:milogorodskii@mail.ru), Voronezh State University, Russian Federation

The quasi-likelihood and asymptotically maximum likelihood algorithms of duration estimation have been synthesized and analyzed. The losses in estimation accuracy caused by a priori lack of knowledge of background intensity were also found.

**Keywords:** quasi-likelihood estimate; maximum likelihood asymptotic estimate; scattering of estimates; a priori parametric uncertainty

### REFERENCES

1. SHEREMET'EV, A.G. *Statistical Theory of Laser Communications* [in Russian]. Moscow: Svyaz', 1971.

2. VOLOKHATYUK, V.A.; KOCHETKOV, V.M.; KRASOVSKII, R.R. *Optical Detection Problems* [in Russian]. Moscow: Sov. Radio, 1971.

3. GAGLIARDI, ROBERT M.; KARP, SHERMAN. *Optical Communications*. Wiley, 1976.

---

\* The study was carried out at the expense of grant from the Russian Science Foundation (Project No. 15-11-10022).

4. VOROB'EV, V.I. Evaluation of coordinates of the optical radiation source with rectangular intensity profile. *Optiko-Mekhanicheskaya Promyshlennost*, n.4, p.14-16, 1978.
5. VOROB'EV, V.I. *Optical Detection and Ranging for Radio Engineers* [in Russian]. Moscow: Radio i Svyaz', 1983.
6. OVCHINNIKOVA, T.M.; TRIFONOV, A.P. Detection and estimation of the instant of change of unknown intensity of a Poisson flow. I. *Avtomat. i Telemekh.*, n.1, p.66-76, 1999, <http://mi.mathnet.ru/eng/at24>.
7. TRIFONOV, A.P.; MILOGORODSKII, A.A. Estimation of the optical pulse duration with rectangular intensity profile of unknown height. *Radioelectron. Commun. Syst.*, v.59, n.10, p.427-436, 2016. DOI: [10.3103/S0735272716100010](https://doi.org/10.3103/S0735272716100010).
8. KULIKOV, E.I.; TRIFONOV, A.P. *Parameter Estimation of Signals against the Background of Interferences* [in Russian]. Moscow: Sov. Radio, 1978.
9. BOL'SHAKOV, I.A.; RAKOSHITS, V.S. *Applied Theory of Stochastic Flows* [in Russian]. Moscow: Sov. Radio, 1978.
10. MUDROV, V.I.; KUSHKO, V.L. *Measurement Processing Methods. Quasi-Likelihood Estimates* [in Russian]. Moscow: Radio i Svyaz', 1983.
11. STRATONOVICH, R.L. *Selected Problems of the Theory of Fluctuations in Radio Engineering* [in Russian]. Moscow: Sov. Radio, 1961.
12. SOSULIN, Y.G. *The Theory of Detection and Estimation of Stochastic Signals* [in Russian]. Moscow: Sov. Radio, 1978.
13. TRIFONOV, A.P.; KORCHAGIN, Y.E.; BESPALOVA, M.B. Statistical properties of height and provisions of absolute maximum Markov processes Bachelier type. *Vestnik VGU. Ser. Fizika, Matematika*, n.4, p.35-43, 2014, [http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=physmath&year=2014&num=04&f\\_name=2014-04-07](http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=physmath&year=2014&num=04&f_name=2014-04-07).

Received in final form August 8, 2016