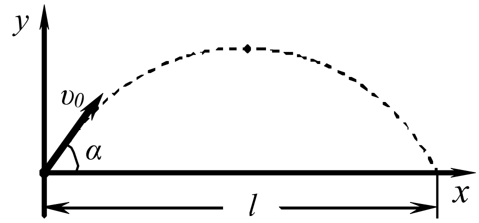
Задача 1. Из шланга, лежащего на земле, струя воды бьёт под углом $\alpha = 45°$ к горизонту и попадает на землю на расстоянии $\ell = 8$ м от него. Площадь сечения отверстия шланга $S = 5$ см^2. Определите массу m струи, находящейся одновременно в воздухе. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Решение

$\alpha = 45°$
$\ell = 8$ м
$S = 5\cdot10^{-4}$ м^2
$\rho = 10^3$ кг/м^3
m – ?

Рассмотрим движение отдельной капли воды. Пусть υ_0 – начальная скорость воды, тогда зависимости от времени координат капли будут иметь вид:



$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \tag{1.1}$$

$$y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.2}$$

В момент времени τ, соответствующий падению капли на землю, $x = \ell$, а $y = 0$:

$$\ell = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot \tau, \tag{1.3}$$

$$0 = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2}. \tag{1.4}$$

Из (1.4)

$$\tau = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \tag{1.5}$$

Таким образом, каждая капля воды находится в воздухе в течение времени τ (1.5). Очевидно, что вода, находящаяся в воздухе, вытекла из шланга именно за это время. Её объём

$$V = S\upsilon_0\tau, \tag{1.6}$$

а масса

$$m = \rho V. \tag{1.7}$$

С учетом (1.6) и (1.5) получим

$$m = \frac{2\rho S\upsilon_0^2 \sin\alpha}{g}. \tag{1.8}$$

Из (1.3) и (1.5) дальность полета воды

$$\ell = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}. \tag{1.9}$$

С учетом (1.9) из (1.8) имеем

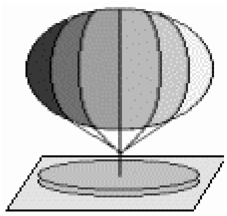
$$m = \frac{\rho\ell S}{\cos\alpha}. \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.10) числовые значения, получим

$$m \approx 5{,}7 \text{ кг}. \tag{1.11}$$

Примерная схема оценивания (*8 баллов*)

1) Вывод выражения (1.5) для времени полёта капли..............................2 балла
2) Выражение (1.6) для объёма воды, находящейся в воздухе.............................1 балл
3) Выражение (1.8) для массы воды, находящейся в воздухе..........................1 балл
4) Вывод выражения (1.9) для дальности полёта воды.................................2 балла
5) Правильный ответ в общем виде (1.10)...1балл
6) Правильный числовой ответ (1.11)..1балл

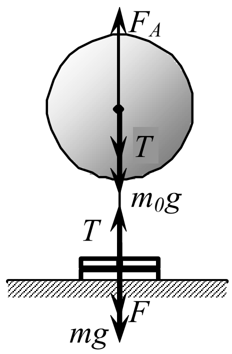


Задача 2. Объём гелиевого метеорологического зонда равен V = 64 м^3. Чтобы удержать зонд, его прикрепляют невесомым нерастяжимым тросом к верхней из двух одинаковых пластин, плотно притертых друг к другу. Масса каждой пластины m = 1 кг, нижняя пластина закреплена на земле. Найдите минимально возможную площадь S таких пластин, если плотность гелия равна ρ_1 = 0,178 кг/м^3, плотность воздуха ρ_2 = 1,293 кг/м^3. Атмосферное давление принять равным $p_a = 10^5$ Па, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Толщиной и массой оболочки зонда пренебречь.

Решение

V = 64 м^3
m = 1 кг
ρ_1 = 0,178 кг/м^3
ρ_2 = 1,293 кг/м^3
$p_a = 10^5$ Па
g = 10 м/с^2

S – ?



Пусть m_0 - масса гелия в зонде. На зонд действуют сила тяжести m_0g, сила натяжения троса T и сила Архимеда F_A, а на верхнюю пластину – сила тяжести mg, сила давления атмосферы F и сила натяжения троса T (см. рисунок) (при минимально возможной площади пластин, достаточной для удержания зонда, сила реакции нижней пластины $N = 0$).

Зонд и пластина находятся в состоянии равновесия.

Условие равновесия зонда

$$F_A = m_0g + T, \tag{2.1}$$

где

$$F_A = \rho_2 gV, \tag{2.2}$$

$$m_0 = \rho_1 V. \tag{2.3}$$

Условие равновесия верхней пластины

$$T = F + mg, \tag{2.4}$$

где

$$F = p_aS. \tag{2.5}$$

С учетом (2.2) – (2.5) уравнение (2.1) принимает вид

$$\rho_2 gV = \rho_1 gV + p_aS + mg, \tag{2.6}$$

откуда получаем

$$S = \frac{((\rho_2 - \rho_1)V - m)g}{p_a}. \tag{2.7}$$

Подставляя в (2.7) числовые значения, получим

$$S \approx 70{,}4 \text{ см}^2. \tag{2.8}$$

Примерная схема оценивания (*6 баллов*)

1) Условие равновесия зонда (2.1)……………………………………………1 балл
2) Выражение для силы Архимеда (2.2)……………………………………1 балл
3) Условие равновесия пластины (2.4)………………………………………1 балл
4) Выражение силы давления через давление и площадь (2.5)……………1 балл
5) Правильный ответ в общем виде (2.7)……………………………………1 балл
6) Правильный числовой ответ (2.8)…………………………………………1балл

Задача 3. Два одинаковых теплоизолированных цилиндрических калориметра высотой h = 75 см заполнены на 1/3 каждый. Первый – льдом, образовавшимся в результате замерзания налитой в него воды, второй – водой при $t_в$ = 10 °С. Воду из второго калориметра переливают в первый, в результате чего он оказался заполнен на 2/3. После того как температура в первом калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на Δh = 0,5 см. Плотность льда равна $\rho_л$ = 900 кг/м^3, воды – $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, удельная теплота плавления льда λ = 340 кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_л$ = 2,1 кДж/(кг·К), удельная теплоемкость воды $c_в$ = 4,2 кДж/(кг·К). Найти начальную температуру $t_л$ льда в первом калориметре.

Решение

h = 0,75 м
$t_в$ = 10 °С
Δh = 0,005 м
$\rho_л$ = 900 кг/м^3
$\rho_в$ = 1000 кг/м^3
$\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг
$c_л$ = 2100 Дж/(кг·°С)
$c_в$ = 4200 Дж/(кг·°С)

$t_л$ – ?

Так как уровень заполнения калориметра повысился, то это означает, что часть воды кристаллизовалась (при этом объём увеличивается, т.к. плотность льда меньше, чем воды). Если бы кристаллизовалась вся вода, то получившийся из неё лёд занял бы объём

$$V' = \frac{m_в}{\rho_л}, \tag{3.1}$$

где $m_в = \rho_в S \dfrac{h}{3}$ – масса воды во втором калориметре, S – площадь основания цилиндра. Тогда объём содержимого первого калориметра увеличился бы на

$$\Delta V' = V' - S\frac{h}{3} = S\frac{h}{3}\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right), \tag{3.2}$$

а повышение уровня заполнения составило бы

$$\Delta h' = \frac{\Delta V'}{S} = \frac{h}{3}\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right) \approx 2{,}8 \text{ см}. \tag{3.3}$$

Поскольку Δh меньше этой величины, то это означает, что вода кристаллизовалась не вся, и установившаяся температура содержимого первого калориметра равна t_0 = 0 °С.

Таким образом, в процессе установления теплового равновесия лёд, первоначально находившийся в первом калориметре, получит количество теплоты

$$Q_1 = c_л m_л (t_0 - t_л), \tag{3.4}$$

где $m_л = \rho_л S \dfrac{h}{3}$ – его масса.

Вода, которую перелили из второго калориметра, отдаст количество теплоты

$$Q_2 = c_в m_в (t_в - t_0) + \lambda \Delta m, \tag{3.5}$$

где Δm – масса кристаллизовавшейся воды. Очевидно, что увеличение объёма содержимого первого калориметра равно разности объёмов, занимаемых льдом массой Δm и водой той же массы:

$$S\Delta h = \frac{\Delta m}{\rho_л} - \frac{\Delta m}{\rho_в}, \tag{3.6}$$

откуда следует, что

$$\Delta m = \frac{S\Delta h \rho_в \rho_л}{\rho_в - \rho_л}. \tag{3.7}$$

С учетом (3.4), (3.5) и (3.7) уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$c_л \rho_л S \frac{h}{3}(t_0 - t_л) = c_в \rho_в S \frac{h}{3}(t_в - t_0) + \lambda \frac{S\Delta h \rho_в \rho_л}{\rho_в - \rho_л}, \tag{3.8}$$

откуда окончательно получим

$$t_л = t_0 - \frac{c_в \rho_в}{c_л \rho_л}(t_в - t_0) - \frac{3\lambda \Delta h \rho_в}{c_л h(\rho_в - \rho_л)}. \tag{3.9}$$

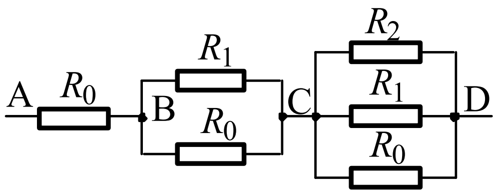
Подставляя в (3.9) числовые значения, получим

$$t_л \approx -54\ ^oC. \tag{3.10}$$

Примерная схема оценивания (*10 баллов*)

1) Вывод (и его обоснование) о том, что часть воды кристаллизовалась..1 балл
2) Вывод (и его обоснование) о том, что кристаллизовалась не вся вода (3.1) – (3.3)…………………2 балла
3) Значение установившейся температуры в калориметре..............1 балл
4) Выражение для количества теплоты, полученного льдом (3.4)...1 балл
5) Выражение для количества теплоты, отданного водой (3.5)…....1 балл
6) Выражение для массы кристаллизовавшейся воды (3.7)…....…...1 балл
7) Уравнение теплового баланса (3.8)……………………………...1 балл
8) Правильный ответ в общем виде (3.9)………..…………………..1 балл
9) Правильный числовой ответ (3.10)……..……..................................1балл

Задача 4. В схеме, приведенной на рисунке, известны сопротивление R_0 и напряжения U_0, $U_0/3$ и $U_0/4$ на участках AB, BC и CD, соответственно. Найти сопротивление R_2 и силу тока, текущего через него.



Решение

R_0, U_0
R_2 – ?
I_2 – ?

С помощью закона Ома для участка цепи выразим силу тока I_0 через резистор R_0 на участке AB:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0}. \tag{4.1}$$

Общее сопротивление участка BC равно

$$R_{BC} = \frac{R_1 R_0}{R_1 + R_0}, \tag{4.2}$$

а сила тока на этом участке также равна I_0. Поэтому, согласно закону Ома, для этого участка можно записать

$$\frac{U_0}{3} = I_0 R_{BC}, \tag{4.3}$$

откуда с учетом (4.1) и (4.2) получим

$$R_1 = \frac{R_0}{2}. \tag{4.4}$$

Тогда, с учетом (4.4), общее сопротивление участка CD

$$R_{CD} = \frac{R_2 R_0}{3R_2 + R_0}, \tag{4.5}$$

а сила тока на этом участке также равна I_0.

Запишем закон Ома для этого участка

$$\frac{U_0}{4} = I_0 R_{CD}, \tag{4.6}$$

откуда с учетом (4.1) и (4.5) получим

$$R_2 = R_0. \tag{4.7}$$

Найдём теперь и силу тока через этот резистор:

$$I_2 = \frac{U_0}{4R_0}. \tag{4.8}$$

Примерная схема оценивания (*8 баллов*)

1) Сила тока в цепи (4.1)……………………………………………………1 балл
2) Общее сопротивление участка BC (4.2)………………………………1 балл
3) Закон Ома для участка BC (4.3)………………………………………1 балл
4) Значение сопротивления R_1 (4.4)……………………………………1 балл
5) Общее сопротивление участка CD (4.5)………………………………1 балл
6) Закон Ома для участка CD (4.6)………………………………………1 балл
7) Значение сопротивления R_2 (4.7)……………………………………1 балл
8) Сила тока через R_2 (4.8)………………………………………………1 балл