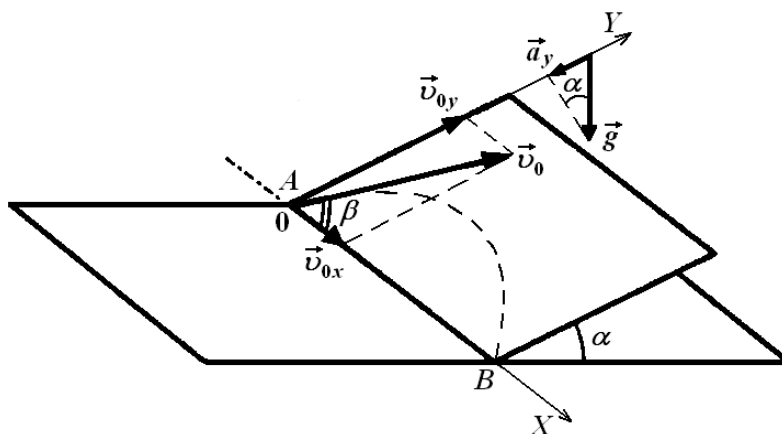


**Задача 1.** Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой  $AB$ . Угол между плоскостями  $\alpha = 30^\circ$ . В серии опытов маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки  $A$  с начальной скоростью  $v_0 = 2$  м/с под различными углами  $\beta$  к прямой  $AB$ . В ходе движения шайба съезжает на прямую  $AB$  в точке  $B$ . Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите максимальное значение расстояния  $AB$ , которое возможно в данных условиях.

**Решение**

Выберем направление координатных осей, так чтобы они лежали в рассматриваемых плоскостях (см. рисунок). Запишем кинематический закон движения шайбы

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}. \end{cases} \quad (1)$$



Из рисунка видно, что

$$a_x = 0, \quad a_y = -g \sin \alpha. \quad (2)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \beta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \beta, \quad (3)$$

Примем во внимание, что в начальный момент времени  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , а в конечный момент  $x = S_{AB}, y = 0$  и, исключив из системы уравнений (1) время, получим с учетом (2), (3) выражение для искомого расстояния

$$S_{AB} = \frac{2v_0^2 \sin \beta \cos \beta}{g \sin \alpha} \quad (4)$$

или с учетом формулы для синуса двойного угла ( $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$ )

$$S_{AB} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g \sin \alpha}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что при постоянных значениях  $v_0$  и  $\alpha$  расстояние  $S_{AB}$  принимает максимальное значение, если  $\sin 2\beta = 1$  (так как максимальное значение синуса равно единице). Следовательно,  $2\beta = 90^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ . Таким образом, окончательно

$$S_{AB}^{\max} = \frac{v_0^2}{g \sin \alpha} = 0,8 \text{ м.} \quad (6)$$

**Примерная схема оценивания (7 баллов)**

- 1) Чертеж с изображением проекций скорости и ускорения на координатные оси.....1 балл
- 2) Кинематический закон движения (1).....1 балл
- 3) Выражения для проекций вектора ускорения (2).....1 балл
- 4) Выражения для проекций вектора начальной скорости (3).....1 балл
- 5) Правильный ответ в общем виде (4) или (5).....1 балл
- 6) Обоснование условия максимума расстояния  $AB$ .....1 балл
- 7) Правильный числовой ответ.....1 балл

**Задача 2.** Груз массой 1 кг висит на невесомой нерастяжимой нити, закрепленной на горизонтальной тонкой оси. Грузу сообщили горизонтальную скорость, так что он сделал полный оборот вокруг оси в вертикальной плоскости. Каков вес груза в момент прохождения им нижнего положения, если известно, что в верхнем положении груз находился в невесомости? Соппротивлением воздуха пренебречь.

**Решение**

Так как груз движется по окружности, его ускорение и в верхней, и в нижней точке траектории является центростремительным. Обозначим скорости груза в нижнем и в верхнем положении соответственно  $v_1$  и  $v_2$ . Запишем для груза, находящегося в нижнем положении, второй закон Ньютона в проекции на радиус окружности

$$T_1 - mg = \frac{mv_1^2}{R}, \quad (1)$$

где  $R$  – радиус окружности. Для груза, находящегося в верхнем положении, имеем

$$T_2 + mg = \frac{mv_2^2}{R}. \quad (2)$$

Согласно закону сохранения механической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg \cdot 2R. \quad (3)$$

или

$$v_1^2 = v_2^2 + 4gR. \quad (4)$$

По третьему закону Ньютона вес тела по модулю равен силе натяжения нити. По условию

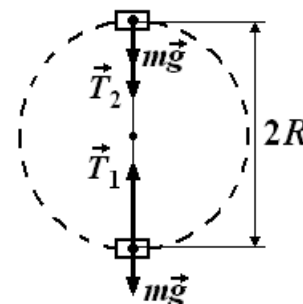
$$T_2 = P_2 = 0. \quad (5)$$

С учетом (5) из (2) и (4) найдем, что

$$v_1^2 = 5gR. \quad (6)$$

Подставив (6) в (1), окончательно получим

$$P_1 = T_1 = 6mg = 60 \text{ Н}. \quad (7)$$



**Примерная схема оценивания (7 баллов)**

- 1) Чертеж с изображением всех приложенных к грузу сил.....1 балл
- 2) Второй закон Ньютона для груза, находящегося в нижнем положении (1).....1 балл
- 3) Второй закон Ньютона для груза, находящегося в верхнем положении (2).....1 балл
- 4) Закон сохранения механической энергии (3).....1 балл
- 5) Равенство модулей веса тела и силы натяжения нити.....1 балл
- 6) Правильный ответ в общем виде (7).....1 балл
- 7) Правильный числовой ответ.....1 балл

**Задача 3.** Теплоизолированный сосуд разделен теплонепроницаемой перегородкой на две части. В одной части находится 2 моль гелия при температуре 300 К, а в другой 1 моль аргона при температуре 600 К. Перегородку удалили. Определите плотность смеси газов, если установившееся давление смеси оказалась равным 40 кПа. Теплоемкостью сосуда пренебречь. Молярные массы гелия и аргона равны соответственно 4 г/моль и 40 г/моль.

**Решение**

Обозначим начальные температуры гелия и аргона соответственно  $T_1$  и  $T_2$ . После удаления перегородки в сосуде установится тепловое равновесие при некоторой температуре  $T$ . При этом по закону сохранения энергии внутренняя энергия системы газов не должна измениться, следовательно

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0. \tag{1}$$

Так как гелий и аргон являются одноатомными газами, изменения их внутренних энергий будут равны соответственно

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2} \nu_1 R(T - T_1), \tag{2}$$

$$\Delta U_2 = \frac{3}{2} \nu_2 R(T - T_2), \tag{3}$$

где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – количества вещества гелия и аргона.

Подставив (2) и (3) в (1) найдем конечную температуру

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2}. \tag{4}$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для смеси газов

$$PV = (\nu_1 + \nu_2)RT, \tag{5}$$

где  $P$  – давление смеси,  $V$  – объем сосуда. Из (5) с учетом (4) получим, что

$$V = \frac{R(\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2)}{P}. \tag{6}$$

Плотность смеси найдем из выражения

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{7}$$

Масса смеси  $m$  равна сумме масс гелия и аргона  $m = m_1 + m_2$  или

$$m = \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2, \tag{8}$$

где  $M_1$  и  $M_2$  – молярные массы гелия и аргона.

Подставив (6) и (8) в (7) получим окончательно

$$\rho = \frac{P(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)}{R(\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2)} \approx 0,2 \text{ кг/м}^3. \tag{9}$$

**Примерная схема оценивания (8 баллов)**

- |  |        |
|--|--------|
| 1) Закон сохранения энергии (1).....                           | 1 балл |
| 2) Выражения для изменения внутренней энергии (2) или (3)..... | 1 балл |
| 3) Температура смеси газов (4).....                            | 1 балл |
| 4) Уравнение Менделеева-Клапейрона (5).....                    | 1 балл |
| 5) Выражение для плотности смеси (7).....                      | 1 балл |
| 6) Масса смеси газов (8).....                                  | 1 балл |
| 7) Правильный ответ в общем виде (9).....                      | 1 балл |
| 8) Правильный числовой ответ.....                              | 1 балл |

**Задача 4.** До замыкания ключа К на схеме (см. рисунок) идеальный вольтметр V показывал напряжение 10 В. После замыкания ключа идеальный амперметр А показывает силу тока 2 А. Каково внутреннее сопротивление  $r$  батареи? Резисторы имеют следующие сопротивления:  $R_1 = R_3 = R_4 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом.

**Решение**

Так как вольтметр идеальный, то есть его сопротивление бесконечно велико, ток через батарею при разомкнутом ключе не течет. Следовательно, до замыкания ключа вольтметр показывает ЭДС батареи

$$U_V = E. \quad (1)$$

Обозначим токи, текущие после замыкания ключа через резисторы  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно  $I_1$  и  $I_2$ . Амперметр показывает ток  $I_2$ , текущий через резистор  $R_2$

$$I_A = I_2. \quad (2)$$

Так как амперметр идеальный его сопротивление равно нулю и на нем не происходит падения напряжения. Резисторы  $R_1$  и  $R_2$  включены параллельно, следовательно, напряжения на них одинаковые

$$U_1 = U_2. \quad (3)$$

Используя закон Ома для участков цепи, содержащих резистор  $R_1$  и  $R_2$ ,

$$I_1 = U_1 / R_1, \quad (4)$$

$$I_2 = U_2 / R_2 \quad (5)$$

с учетом (2) и (3) найдем силу тока  $I_1$

$$I_1 = U_2 / R_1 = I_2 R_2 / R_1 = I_A R_2 / R_1. \quad (6)$$

По закону сохранения заряда ток  $I$  через батарею равен

$$I = I_1 + I_2 \quad (7)$$

или с учетом (2) и (6)

$$I = I_A \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right). \quad (8)$$

С другой стороны согласно закону Ома для всей цепи

$$I = \frac{E}{R_{\text{полн}} + r}, \quad (9)$$

где  $R_{\text{полн}}$  – полное сопротивление внешней цепи.

Резисторы  $R_1$  и  $R_2$  соединены параллельно,  $R_3$  и  $R_4$  также параллельно, суммарные сопротивления  $R_{12}$  и  $R_{34}$  соединены последовательно, следовательно

$$R_{\text{полн}} = R_{12} + R_{34} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{2}. \quad (10)$$

Искомое сопротивление  $r$  находим, исключая силу тока  $I$  из системы уравнений (8), (9) с учетом (1) и (10)

$$r = \frac{E}{I} - R_{\text{полн}} = \frac{U_V R_1}{I_A (R_1 + R_2)} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{2} = 0,5 \text{ Ом}. \quad (11)$$

**Примерная схема оценивания (8 баллов)**

- 1) Определение показаний вольтметра и амперметра (1) и (2).....1 балл
- 2) Равенство напряжений (3).....1 балл
- 3) Закон Ома для участка цепи (4) или (5).....1 балл
- 4) Закон сохранения заряда (7).....1 балл
- 5) Закон Ома для всей цепи (9).....1 балл
- 6) Полное сопротивление (10).....1 балл
- 7) Правильный ответ в общем виде (11).....1 балл
- 8) Правильный числовой ответ.....1 балл

