ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И.释Мармо,
М. В. Фролов

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
Часть II

Специальная теория относительности и электромагнитные явления

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Утверждено научно-методическим советом физического факультета
23 декабря 2008 г., протокол № 12

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры электроники ВГУ
В. И. Костылев

Учебное пособие подготовлено на кафедре теоретической физики физического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендовано для студентов 3 курса дневного отделения физического факультета Воронежского государственного университета.

Для специальности: 010701 — Физика

Содержание

1. Релятивистская кинематика и механика свободной частицы

1.1. Максвелловская электродинамика и принцип относительности

Созданная во второй половине XIX века максвелловская теория электромагнитного поля, объяснив с единых позиций все (неквантовые) электромагнитные явления, вошла в противоречие с другой фундаментальной физической теорией — классической (ньютоновской) механикой. Разрешение этого противоречия привело к коренному пересмотру имевшихся в физике представлений о пространстве и времени и созданию специальной теории относительности (СТО).

Со времен Галилея и Ньютона в механике существовало представление о полном равноправии всех инерциальных систем отсчета[1] (ИСО), что нашло выражение в принципе относительности Галилея. Согласно этому принципу, любое механическое явление при одинаковых начальных условиях протекает одинаковым образом во всех ИСО. Математически принцип относительности классической механики может быть сформулирован как сохранение вида уравнений движения при преобразованиях Галилея. Рассмотрим две инерциальные системы K и K'. Пусть K' движется относительно K со скоростью $\mathbf{V}$, причем в момент $t = 0$ начала координатных систем совпадали. Тогда координаты $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ и время t' в системе K' связаны с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и временем t в системе K соотношениями

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \qquad t' = t, \tag{1.1}$$

которые называются *преобразованиями Галилея.* То есть, если в системе K в момент времени t в точке $\mathbf{r}$ произошло некоторое событие[2], то в системе K' это событие произошло в точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ в момент времени $t' = t$ (отсчитанный по часам в системе K', синхронизованным с часами в K). Обратим внимание, что время не преобразуется — во всех ИСО время одно и то же, оно имеет абсолютный характер. Очевидно, что преобразования (1.1) приводят к классическому закону сложения скоростей

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$ — скорости точки в системах K и K' соответственно.

[1] Напомним, что системой отсчета (не обязательно инерциальной) называют совокупность системы координат и часов (в классической механике достаточно одних часов), жестко скрепленных с телом отсчета.

[2] Под событием (говорят также о точечном событии) понимается некоторое явление, которое характеризуется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло.

Запишем уравнение движения частицы с массой m в системе K:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \tag{1.3}$$

Из формул (1.1) следует: $\dfrac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ — ускорение частицы в двух инерциальных системах одно и то же. Кроме того, в классической механике масса — инвариантная величина, одинаковая во всех системах отсчета: $m' = m$. Таким же свойством обладает сила $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

Остановимся подробнее на последнем утверждении. В инерциальных системах существуют только силы взаимодействия между телами, которые могут зависеть от относительного положения тел и их относительной скорости. Пусть, для определенности, рассматриваемая частица взаимодействует с другой частицей. Если обозначить радиус-вектор последней через $\tilde{\mathbf{r}}$, а скорость — через $\tilde{\mathbf{v}}$, то сила будет зависеть от разностей $\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}},\, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}). \tag{1.4}$$

Но при переходе в другую инерциальную систему, согласно преобразованиям Галилея (1.1) и закону сложения скоростей (1.2),

$$\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' - \tilde{\mathbf{r}}', \qquad \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' - \tilde{\mathbf{v}}',$$

т.е. расстояния между частицами и их относительные скорости не изменяются. Согласно опытным данным в области применимости классической механики, и само взаимодействие не зависит от того, в какой инерциальной системе оно рассматривается. Поэтому

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}' - \tilde{\mathbf{r}}',\, \mathbf{v}' - \tilde{\mathbf{v}}') = \mathbf{F}(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}},\, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) \tag{1.5}$$

— как сами функции $\mathbf{F}$, так и их аргументы одинаковы.

Таким образом, при переходе в систему K' уравнение (1.3) сохраняет свою форму[3]:

$$m'\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F}', \tag{1.6}$$

причем масса, сила и ускорение в обеих системах одинаковы, меняются лишь обозначения этих величин. Это означает, что уравнение движения (1.3) остается инвариантным (неизменным) относительно преобразований Галилея. Но

[3]Если при некотором преобразовании координат уравнение не меняет своего вида, его принято называть *ковариантным*. Если же еще окажется, что все члены уравнения остаются неизменными, то оно называется *инвариантным* относительно этого преобразования. Например, уравнение плоскости $(\mathbf{nr}) = a$ только ковариантно, а уравнение сферы $\mathbf{r}^2 = a^2$ еще и инвариантно относительно вращения. Принцип относительности требует только ковариантности относительно преобразований, осуществляющих переход от одной ИСО к другой.

тогда и решения уравнений (1.3) и (1.6) при одинаковых начальных условиях будут тождественны в соответствии с принципом относительности.

В формулах (1.4), (1.5) отражено представление о взаимодействии тел, которое предполагается справедливым в классической механике. Сила зависит от координат (и, возможно, скоростей) взаимодействующих тел, причем координаты и скорости берутся в один и тот же момент времени. Это означает, что, если положение одного из тел изменилось, второе тело почувствует это изменение немедленно. Взаимодействие передается мгновенно, т.е. с бесконечно большой скоростью.

Представление о бесконечной скорости распространения взаимодействий (иногда говорят о распространении «сигналов») тесно связано с абсолютным характером времени: сигнал, распространяющийся с бесконечной скоростью из точки, где произошло событие, в тот же момент приходит во все точки пространства, в том числе к часам каждой из ИСО, которые зарегистрируют одинаковое время наступления события $t' = t'' = \cdots = t$.

С возникновением электродинамики было естественным предположить, что принцип относительности справедлив и для электромагнитных явлений. Однако оказалось, что уравнения Максвелла не сохраняют своей формы при преобразованиях Галилея (1.1). Несовместимость уравнений Максвелла и принципа относительности классической механики следует уже из того, что теория Максвелла дает конечную величину c для скорости распространения электромагнитных волн в вакууме. Но все ИСО, очевидно, равноправны по отношению к вакууму (в частности, вследствие отсутствия материальной среды в вакууме с ним нельзя связать систему отсчета, в которой бы он покоился). Отсюда логически следует — при допущении полного равноправия всех инерциальных наблюдателей, — что скорость света в вакууме должна равняться одной и той же величине c во всех ИСО. Но, согласно классической механике, при переходе от одной ИСО к другой скорости преобразуются по формуле (1.2).

Возникшее противоречие требовало сделать выбор между тремя возможностями:

1) принцип относительности применим в механике и не применим в электродинамике;

2) принцип относительности применим и в механике, и в электродинамике; при этом электродинамика в форме уравнений Максвелла неверна;

3) принцип относительности применим и в механике, и в электродинамике; законы механики в ньютоновской форме (и преобразования координат и времени при переходе в другую ИСО) требуют изменения.

Нековариантность уравнений электродинамики по отношению к преобразованиям Галилея выглядела естественной с позиций «эфирных» теорий, вводивших электромагнитный эфир и рассматривавших электромагнитное поле как особого рода натяжения в нем (по аналогии с натяжениями в упругой среде). В этом случае уравнения Максвелла должны быть справедливыми в единственной системе отсчета, связанной с эфиром. Во всякой другой системе отсчета эфир будет двигаться, поэтому уравнения электромагнитного поля должны содержать в качестве параметра скорость движения системы отсчета относительно эфира. Таким образом, представление об эфире оказывается несовместимым с принципом относительности Галилея. Однако многочисленные экспериментальные попытки обнаружения эфира (среди которых наиболее известны опыт Майкельсона по обнаружению «эфирного ветра» и опыт Физо по обнаружению увлечения эфира движущимися телами) показали неустранимые противоречия в гипотезе эфира и привели к отказу от нее. По современным представлениям электромагнитное поле есть самостоятельный физический объект, не нуждающийся в специальном носителе.

Попытки изменить уравнения Максвелла, чтобы сделать их ковариантными относительно преобразования Галилея, привели к тому, что новые уравнения противоречили опыту.

Таким образом, правильным оказался третий путь: для согласования принципа относительности и электродинамики потребовалось пересмотреть имевшиеся в физике представления о пространстве и времени и заменить преобразования Галилея на преобразования Лоренца.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 1; [2], гл. 11, § 1; [5], § 1.1–1.4, 1.7–1.9.

1.2. Принципы СТО

В основу новой теории были положены два постулата, которые могут быть сформулированы следующим образом:

1. Все законы природы одинаковы во всех ИСО (а не только законы механики, как утверждал принцип относительности Галилея).

2. Скорость распространения любых взаимодействий конечна (напомним, что в ньютоновской механике скорость распространения взаимодействий считалась бесконечной); максимальная (предельная) скорость передачи взаимодействий (сигналов) совпадает со скоростью света в вакууме.

Совокупность этих двух постулатов называется *принципом относительности Эйнштейна*. Из принципа относительности следует, очевидно, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех ИСО. Это значит, что в природе существует скорость, которая не изменяется при переходе от одной ИСО к другой. Отсюда можно заключить, что преобразования Галилея, которые приводят к классическому закону сложения скоростей (1.2), ошибочны.

Наряду с постулатами СТО принципиально важным для ее построения является введение релятивистской системы отсчета. В ньютоновской механике скорость распространения сигналов полагалась бесконечной, поэтому для построения системы отсчета было достаточно одних часов. В СТО учитывается конечность скорости распространения сигналов, поэтому одними часами в системе отсчета ограничиться нельзя. В СТО предполагают, что в любой точке, где определяется время наступления события, в принципе должны быть часы. В пределах одной ИСО устанавливается единое время с помощью синхронизации часов. Эйнштейном было предложено проводить синхронизацию часов с помощью световых сигналов. Из точки A в момент времени t_1 испускается короткий световой сигнал. Установив на часах в точке B в момент прихода светового сигнала время $t = t_1 + r_{AB}/c$ (r_{AB} — известное расстояние между A и B), синхронизируем часы в B с опорными часами в A. Эйнштейновская процедура синхронизации такова, что может быть проведена в любой ИСО. Итак, в релятивистскую систему отсчета входят система координат и набор закрепленных в этой системе синхронизированных часов.

Принципы СТО требуют отказа от классических представлений об абсолютном характере времени. Их прямым следствием является относительность промежутков времени между событиями: утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в одной ИСО, будут не одновременными в другой системе.

Для уяснения этого рассмотрим простой пример. Пусть поезд (система K') движется равномерно и прямолинейно вдоль платформы (система K). В некоторый момент времени из середины поезда (точка A) в его начало (точка C) и конец (точка B) отправляются световые сигналы. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K', как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) c, то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K'). Однако те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут не одновременными для наблюдателя в системе K. Действительно, скорость сигналов относительно K согласно принципу относительности равна тому же c, и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланного из A в C), то в системе K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 1; [2], гл. 11, § 1; [3] § 1; [4] § 65,66; [5], гл. 2, § 2.1–2.3.

1.3. Преобразования Лоренца

Как отмечено выше, преобразования Галилея не удовлетворяют требованиям теории относительности, поэтому они должны быть модифицированы.

Релятивистские формулы преобразования координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую можно установить, исходя из принципов теории относительности (постоянства скорости света во всех ИСО), а также с использованием свойств однородности и изотропности пространства и однородности времени (пространство и время обладают этими свойствами по представлениям как классической, так и релятивистской физики). Основываясь на этих положениях, будем формулировать математические требования, которым должны удовлетворять формулы преобразований, и на каждом этапе искать соответствующие ограничения на искомые формулы, пока полностью не определим их вид.

1. Из однородности пространства и времени вытекает, что связь между координатами события в двух ИСО должна быть линейной:

$$x' = \alpha x + \alpha' y + \beta' z + \beta t + \rho \qquad \text{и т.д.,} \tag{1.7}$$

где $\alpha, \beta, \alpha', \ldots$ — постоянные коэффициенты. Если бы эти величины были функциями координат и времени (т.е. связь между штрихованными и нештрихованными величинами была нелинейной), это означало бы, что закон преобразования (1.7) неодинаков для разных точек пространства и для разных моментов времени. Это противоречило бы однородности пространства-времени — по закону преобразования можно было бы отличать одни области пространства (и моменты времени) от других. Но коэффициенты α, β и т.п. могут зависеть, разумеется, от относительной скорости.

2. Конкретизируем теперь рассматриваемые системы (рис. 1). Пусть соответствующие оси координат в них параллельны и относительное движение происходит вдоль оси x со скоростью V, а начала отсчета выбраны так, что при $t = 0$ точка $x' = y' = z' = 0$ (начало координат системы K') совпадает с точкой $x = y = z = 0$ (началом координат системы K). Часы в системе K' установлены так, чтобы в момент совпадения начал координат систем они показывали время $t' = 0$. В этом случае свободные члены в равенствах (1.7) (ρ и т.п.) обратятся в нуль.

Поскольку оси координатных систем параллельны, то плоскость xy совпадает с плоскостью $x'y'$. Это означает, что при $z' = 0$ должно быть и $z = 0$, причем эти равенства должны выполняться при любых x', y', t' и соответственно x, y, t. Это возможно только, если связь между z и z' имеет вид $z' = kz$, $k = \text{const}$. В силу изотропии пространства такая же связь с тем же коэффициентом k должна быть между y и y': $y' = ky$.

Связь x' и t' с координатами и временем в системе K, согласно сказанному выше, имеет следующий общий вид

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t + \alpha' y + \beta' z, \\ t' &= \sigma x + \delta t + \sigma' y + \delta' z. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В плоскости $x' = 0$ имеем $x = Vt$ при любых z и y, так как система K' движется относительно K со скоростью V. Подставив эти значения x и x' в первое равенство (1.8), будем иметь $\alpha' = \beta' = 0$, $\beta = -\alpha V$. Наконец, обратимся к формуле для t'. Часы в системе K' установлены так, чтобы при $x = 0$ и $t = 0$ было $t' = 0$. Это возможно только при $\sigma' = \delta' = 0$. В итоге имеем следующие формулы преобразований:

$$\begin{aligned} &x' = \alpha(V)(x - Vt), \quad y' = k(V)y, \quad z = k(V)z', \\ &t' = \sigma(V)x + \delta(V)t, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где у коэффициентов явно указана зависимость от относительной скорости.

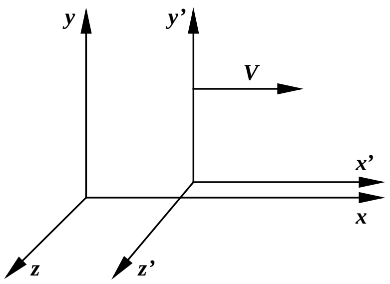

Рис. 1

3. Используем теперь равноправие систем K и K'. Оно означает, что формулы перехода из K' в K должны получаться из формул перехода (1.9) заменой V на $-V$:

$$\begin{aligned} &x = \alpha(-V)(x' + Vt'), \quad y = k(-V)y', \quad z = k(-V)z', \\ &t = \sigma(-V)x' + \delta(-V)t'. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Рассмотрим сначала формулы для y и z. Случаи (1.9) и (1.10) отличаются только направлением относительной скорости, которая и в том и в другом случае перпендикулярна плоскости yz. Но оба направления равноправны (пространство изотропно), поэтому $k(-V) = k(V)$. Совершая преобразования от y к y' и затем снова от y' к y, будем иметь $y = k^2 y$, т.е. $k^2 = 1$, $k = \pm 1$. Значение $k = -1$ отвечает противоположной ориентации осей y и y', а нашему случаю соответствует значение $k = 1$.

Подставим теперь в формулу для x из (1.10) значения x' и t' из (1.9):

$$x = [\alpha(-V)\alpha(V) - V\sigma(V)\alpha(-V)]x + \alpha(-V)V[\delta(V) - \alpha(V)]t. \tag{1.11}$$

Чтобы это равенство было справедливым для всех x и t, должно выполняться соотношение

$$\delta(V) = \alpha(V). \tag{1.12}$$

Второе соотношение, следующее из (1.11), нам не потребуется.

4. Используем теперь инвариантность скорости света, т.е. постоянство ее величины в различных ИСО. Пусть в момент совпадения систем K и K' ($t = t' = 0$) из совпадающих начал отсчета испущен короткий световой сигнал. Точка пересечения фронта волны в системе K движется вдоль оси x со скоростью $x/t = c$. Но вследствие того, что световой сигнал распространяется во всех системах отсчета с одинаковой скоростью, скорость фронта в

системе K' будет той же самой: $x'/t' = c$. Поэтому получаем из (1.9), поделив уравнения для x' на уравнение для t':

$$c = \frac{\alpha(x - Vt)}{\sigma x + \alpha t} = \frac{\alpha(c - V)}{\sigma c + \alpha}.$$

Отсюда

$$\sigma(V) = -\frac{V}{c^2}\alpha(V). \tag{1.13}$$

Чтобы определить коэффициент $\alpha(V)$, рассмотрим уравнение сферического волнового фронта в системах K и K':

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2.$$

В этих уравнениях опять использовано свойство инвариантности скорости света, поэтому c — одинаковое. Поскольку $y' = y$, $z' = z$, то

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2. \tag{1.14}$$

Из последнего уравнения с помощью (1.9), (1.12), (1.13) получаем

$$\alpha^2(1 - V^2/c^2)(c^2t^2 - x^2) = (ct)^2 - x^2,$$

откуда

$$\alpha(V) = \pm(1 - V^2/c^2)^{-1/2}. \tag{1.15}$$

Здесь снова следует взять только знак плюс, так как минус соответствует противоположному направлению осей x и x'.

Собирая вместе результаты (1.9)–(1.15), приходим к релятивистским формулам преобразования координат и времени (преобразованиям Лоренца):

$$\begin{gathered} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Преобразования Лоренца позволяют, зная координаты x, y, z и время t события в системе отсчета K, найти координаты x', y', z' и время t' события в системе K'.

Обратные формулы, выражающие x, y, z, t через x', y', z', t' проще всего получаются заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить, решая уравнения (1.16) относительно x, y, z, t:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \\
t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

Легко видеть, что при малых скоростях $V \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

При $V > c$ в формулах (1.17) координаты x, t становятся мнимыми. Это соответствует тому факту, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Невозможно даже использование системы отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости света,— при этом знаменатели в формулах (1.17), (1.16) обратились бы в нуль.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 1; [5], § 2.4, 2.5.

1.4. Некоторые следствия из преобразований Лоренца

1. Сокращение линейных размеров движущихся тел (лоренцево сокращение). Пусть в системе K' покоится линейка, параллельная оси x. Длина ее, измеренная в этой системе, равна $l_0 = x'_2 - x'_1$. Длина стержня, измеренная в той системе отсчета, в которой он покоится, называется *собственной длиной*. Найдем длину l линейки в системе K. По определению l есть разность координат конца и начала, взятых в один и тот же момент времени. Из (1.16) находим

$$
x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},
$$

или

$$
l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{1.18}
$$

Этот результат означает, что длина движущегося объекта уменьшается вдоль направления скорости. Поперечные к скорости размеры тела не изменяются, поэтому объем уменьшается так же, как длина:

$$
\tilde{V} = \tilde{V}_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{1.19}
$$

2. Эффект замедления хода движущихся часов. Предположим, что в одном и том же месте пространства в K' произошли два события. Пусть промежуток времени между этими событиями, измеренный по часам, покоящимся в K', есть $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \tau$. Найдем время, которое прошло между этими двумя событиями в системе K:

$$
\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.
$$

Время, отсчитываемое по часам, покоящимся относительно объекта, называется *собственным временем* этого объекта. Формула (1.4) показывает, что промежуток собственного времени меньше промежутка времени, измеренного в неподвижной системе отсчета (движущиеся часы идут медленнее неподвижных):

$$\tau = \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2}\,.$$

Наглядным примером замедления хода движущихся часов является распад μ-мезонов. μ-мезоны могут возникать в космических лучах на высоте ~ 10 км над поверхностью Земли и имеют время жизни $\tau_0 \sim 2 \cdot 10^{-6}$ с. Если бы не было эффекта замедления времени, они проходили бы расстояние ~ 600 м, однако эти частицы регистрируются вблизи земной поверхности. Это объясняется тем, что τ_0 — время жизни в собственной системе отсчета, а с точки зрения наблюдателя на Земле время жизни есть $\tau_0/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, и если их скорость достаточно велика, то мюоны могут достичь поверхности Земли.

3. Инвариантность интервала. Пусть в некоторой точке пространства x_1, y_1, z_1 в момент t_1 произошло некоторое событие, а в другой точке пространства x_2, y_2, z_2 в момент t_2 произошло другое событие. Интервалом между двумя событиями называется величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (1.20)$$

В системе отсчета K' событие 1 произошло в точке $x'_1,\ y'_1,\ z'_1$ в момент t'_1, а событие 2 в точке $x'_2,\ y'_2,\ z'_2$ в момент t'_2. Интервал между ними

$$s'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}\,.$$

Непосредственным расчетом можно проверить, что

$$s'_{12} = s_{12}\,.$$

Если два события бесконечно близки друг другу, то для интервала между ними имеем

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,. \qquad (1.21)$$

Введем обозначение $l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ и запишем квадрат интервала в виде

$$s_{12}^2 = c^2(\Delta t_{12})^2 - l_{12}^2\,.$$

Величина s_{12}^2 может быть как положительной, так и отрицательной. Если $s_{12}^2 > 0$, то такой интервал называется времениподобным (знак s_{12}^2 как у слагаемого со временем), если $s_{12}^2 < 0$, то интервал пространственноподобный.

Если события разделены времениподобным интервалом, то, очевидно, нельзя найти систему отсчета, в которой события происходили бы одновременно. Если события разделены пространственноподобным интервалом, то такую систему найти можно, следовательно, такие события не могут быть связаны причинно-следственной связью. Действительно, если $s_{12}^2 < 0$, то $c\Delta t_{12} < l_{12}$, и никакой сигнал не успеет попасть из точки 1 в точку 2.

4. Релятивистский закон преобразования скоростей. Найдем формулы, связывающие скорости частицы в системах отсчета K и K'. Для этого запишем преобразования Лоренца (1.17) в дифференциальном виде

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad dy = dy'\,, \quad dz = dz'\,, \quad dt = \frac{dt' + V/c^2 dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,.$$

Разделив первые три равенства на четвертое и вводя обозначения для декартовых составляющих скорости частицы в системе K

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1.22}$$

и в системе K'

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}\,,$$

получим релятивистский закон преобразования скоростей

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}\,, \quad v_{y,z} = \frac{v'_{y,z}\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}\,. \tag{1.23}$$

В предельном случае $c \to \infty$ преобразование (1.23) переходит в формулы классической механики (1.2). Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть снова скорость, не большая скорости света. Так, если $v'_x \to c$, $v'_y = v'_z = 0$, то $v_y = v_z = 0$, а

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c}} = c\,. \tag{1.24}$$

Следует подчеркнуть, что при переходе в другую систему неизменной остается только величина скорости света, направление же ее может измениться.

Результат (1.24) не означает, что в СТО никакие скорости не могут превышать скорости света. Скорость светового зайчика на экране, достаточно удаленном от источника, фазовая скорость волны, скорость разлета или сближения частиц в лабораторной системе и т.п. могут быть больше c. СТО утверждает лишь, что со сверхсветовыми скоростями невозможна передача информации и взаимодействий.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 2; [2], гл. 11, § 2; [4] § 68–70.

1.5. Геометрический смысл преобразований Лоренца

Многим результатам релятивистской кинематики можно придать простой геометрический смысл. Такой подход облегчает интерпретацию и позволяет развить изящный математический аппарат СТО.

Поскольку время в СТО теряет абсолютный характер и зависит от системы отсчета, то для изображенитя кинематических соотношений естественно использовать четырехмерное многообразие — «пространство–время», для которого применяют также название «мир» или «четырехмерный мир Минковского». Отдельные точки в четырехмерном пространстве–времени указывают пространственные координаты и время некоторого события. Последовательность кинематических состояний любого тела (т.е. его координаты в разные моменты времени) изображается мировой линией.

Выясним теперь геометрический смысл преобразований Лоренца. Запишем их для x и ct (удобно умножить время на c, чтобы все координаты имели одинаковую размерность):

$$x' = \frac{x - \frac{V}{c}ct}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{1.25}$$

Это линейное однородное преобразование, напоминающее преобразование поворота в трехмерном евклидовом пространстве. Запишем, например, преобразование поворота на угол φ в плоскости xy в обычном пространстве:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \tag{1.26}$$

Важнейшим свойством этого преобразования является сохранение расстояния между любыми двумя точками:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{1.27}$$

Расстояние $r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ между двумя точками 1 и 2 остается инвариантным при преобразовании поворота.

Для выяснения сходства и различий между поворотом в евклидовом пространстве и преобразованием Лоренца запишем (1.25) через гиперболические функции:

$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\psi - ct\,\mathrm{sh}\,\psi, \qquad ct' = -x\,\mathrm{sh}\,\psi + ct\,\mathrm{ch}\,\varphi, \tag{1.28}$$

где

$$\mathrm{ch}\,\psi = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \qquad \mathrm{sh}\,\psi = (V/c)(1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \tag{1.29}$$

причем, как и должно быть,

$$\mathrm{ch}^2\,\psi - \mathrm{sh}^2\,\psi = 1. \tag{1.30}$$

Преобразование (1.28) также обладает свойством оставлять инвариантной некоторую квадратичную комбинацию координат x и ct — интервал

$$s_{12} = \sqrt{(ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2}. \tag{1.31}$$

Интервал s_{12} можно рассматривать как «расстояние» между точками плоскости x, ct. Но квадрат разности пространственных координат входит в выражение интервала со знаком минус. Пространство, в котором расстояние между точками определено формулой (1.31), называется псевдоевклидовым. Наряду с очевидным сходством между псевдоевклидовым и евклидовым пространствами имеются и существенные различия. Например, в евклидовом пространстве квадрат расстояния между двумя точками $r_{12}^2 \geqslant 0$, причем равенство этой величины нулю означает, что точки 1 и 2 совпадают. В псевдоевклидовом пространстве s_{12}^2 может иметь любой знак, а обращение интервала в нуль возможно и для двух совершенно различных точек в четырехмерном пространстве–времени.

Существует способ сделать преобразования Лоренца (1.25), (1.28) формально тождественными преобразованию поворота (1.26) в евклидовой плоскости. Это достигается путем введения мнимой временно́й координаты ict и мнимого угла поворота. Заменим в (1.28) ψ на $-i\varphi$ и воспользуемся формулами $\operatorname{ch}(-i\varphi) = \cos\varphi$, $\operatorname{sh}(-i\varphi) = -i\sin\varphi$.

Получим

$$x'^1 = x^1\cos\varphi + x^4\sin\varphi, \qquad x'^4 = -x^1\sin\varphi + x^4\cos\varphi, \tag{1.32}$$

где $x^1 = x$, $x^4 = ict$. Интервал в этих переменных имеет вид

$$s_{12}^2 = -(x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^4 - x_1^4)^2, \tag{1.33}$$

т.е. будет отличаться только знаком от квадрата расстояния r_{12}^2 между точками евклидовой плоскости.

Но следует иметь в виду, что введение мнимой временно́й координаты приводит лишь к формальному сходству с евклидовым пространством. Глубокое внутреннее различие между двумя геометриями — евклидовой и псевдоевклидовой — этим, разумеется, не устраняется.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 3.

1.6. Релятивистская механика. Функция Лагранжа свободной частицы

Механику, уравнения которой ковариантны относительно преобразований Лоренца, называют релятивистской. При ее построении прежде всего нужно описать движение свободной релятивистской частицы. При этом удобно исходить из принципа наименьшего действия. Согласно этому принципу любая механическая система характеризуется некоторой функцией от координат, скоростей и времени $L(q, \dot{q}, t)$, причем движение системы подчинено следующему условию. Пусть в моменты времени t_1 и t_2 система занимает определенные положения, характеризуемые набором координат $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{1.34}$$

имел наименьшее возможное значение. Функция $L(q, \dot{q}, t)$ называется функцией Лагранжа данной системы, а интеграл S — действием. Таким образом, действие стационарно на физических траекториях,

$$\delta S = 0,$$

из этого условия выводятся уравнения движения. Запишем действие релятивистской частицы как интеграл по траектории в четырехмерном пространстве, или, как говорят, интеграл по мировой линии (точки мировой линии определяют координаты частицы во все моменты времени):

$$S = \int_a^b dU\,.$$

В соответствии с принципом относительности потребуем, чтобы действие свободной релятивистской частицы не менялось при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, т.е. чтобы S было инвариантной величиной. Для свободной частицы единственная инвариантная величина, характеризующая ее движение из точки a в точку b, — это интеграл

$$S = \alpha \int_a^b ds\,, \tag{1.35}$$

где α — инвариантная постоянная. Инвариантность бесконечно малого интервала

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

обсуждалась выше. Переписав выражение для интервала $ds = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, приведем (1.35) к виду (1.34):

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt\,.$$

Следовательно, функция Лагранжа

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{1.36}$$

Значение постоянной α определим из условия перехода (1.36) при $v \ll c$ в классическое выражение

$$L_{\text{кл}} = \frac{mv^2}{2}\,.$$

При малых v/c из (1.36) получаем

$$L \approx \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}\,.$$

Поскольку в классической функции Лагранжа постоянную (в данном случае αc) можно опустить, то

$$\alpha = -mc,$$

и функция Лагранжа свободной релятивистской частицы есть

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \tag{1.37}$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 5; [2], гл. 11, § 5; [3] § 8.

1.7. Импульс и энергия свободной частицы. Формула Эйнштейна

Из лагранжева метода в механике известно, что импульс частицы выражается через функцию Лагранжа по формуле

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \nabla_{\mathbf{v}} L\,.$$

Выполняя дифференцирование, находим:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{1.38}$$

Очевидно, что при малых скоростях $v \ll c$ из (1.38) получается нерелятивистское выражение для импульса: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Иногда формулу (1.38) записывают в виде, аналогичном нерелятивистскому: $\mathbf{p} = m'\mathbf{v}$, вводя массу движущегося тела:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \tag{1.39}$$

в отличие от массы покоя m. Следует, однако, иметь в виду, что между силой, массой m' и ускорением нет той связи, которая существует в классической механике. Действительно, сила, действующая на частицу, есть производная от импульса по времени. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т.е. сила направлена перпендикулярно скорости. Учитывая, что $|\mathbf{v}| \equiv v = \mathrm{const}$, нетрудно найти

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,.$$

Если же скорость меняется только по величине: $\mathbf{v}/v = \mathrm{const}$, т.е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{\mathbf{v}}{v}\right) = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,.$$

Мы видим, что в этих двух случаях отношение силы к ускорению различно.

Энергией $\mathcal{E}$ частицы называется величина

$$\mathcal{E} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \mathbf{v}\mathbf{p} - L\,.$$

Подставляя сюда выражения (1.37) и (1.38) для L и $\mathbf{p}$, получим

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{1.40}$$

Эта важная формула показывает, в частности, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в ноль при $v = 0$, а остается конечной величиной, равной

$$\mathcal{E}_0 = mc^2\,. \tag{1.41}$$

Энергию $\mathcal{E}_0$ называют энергией покоя, а формулу (1.41) — *формулой Эйнштейна.*

При малых скоростях ($v \ll c$), разлагая (1.40) по степеням v/c:

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}\,, \tag{1.42}$$

имеем, за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы. Напомним здесь, что в нерелятивистской механике энергия определена неоднозначно и постоянную mc^2 в (1.42) можно опустить.

Подчеркнем, что хотя выше говорилось о частице, ее элементарность нигде не использовалась. Поэтому полученные формулы применимы к сложному телу, состоящему из многих частиц, причем под m надо понимать полную массу тела, а под v — скорость его движения как целого. В частности, формула (1.41) справедлива для любого покоящегося как целое тела.

Энергия покоящегося тела содержит в себе помимо энергий покоя входящих в него частиц, также кинетическую энергию частиц и энергию их взаимодействия друг с другом:

$$mc^2 = \sum_a m_a c^2 + \text{кин. эн.} + \text{пот. эн.} \tag{1.43}$$

Другими словами, энергия покоя тела не равна сумме энергий покоя его частей

$$mc^2 \neq \sum m_a c^2, \tag{1.44}$$

поэтому и масса тела не аддитивна

$$m \neq \sum_a m_a \,. \tag{1.45}$$

Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы: масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Разность между массой связанной системы взаимодействующих частиц (тел) и суммой их масс в свободном состоянии

$$\Delta m = \sum m_a - m$$

называется *дефектом массы.* Приведем примеры, иллюстрирующие величину изменения массы покоя при различных превращениях.

При сжигании обычного (химического) топлива в реакции типа

$$\mathrm{C} + \mathrm{O}_2 = \mathrm{CO}_2 + Q$$

на один акт выделяется энергия Q в форме кинетической энергии молекулы CO_2 или фотонов порядка нескольких электронвольт. Это значит, что масса образовавшейся молекулы CO_2 меньше суммы масс молекул C и O_2 на величину $\Delta m = Q/c^2$. Энергия покоя молекулы CO_2 составляет $\mathcal{E}_0 = mc^2 \approx$ $\approx 4 \cdot 10^9$ эВ. Таким образом, относительное изменение массы покоя равно

$\Delta m/m \sim 10^{-9}$, т.е. эта величина сохраняется с огромной точностью. Поэтому при изучении явлений, происходящих с нерелятивистскими частицами (химические превращения, нерелятивистская механика сплошных сред и др.), сохранение массы участвующих в них частиц можно считать точным законом природы.

При ядерных реакциях относительное изменение массы значительно больше. Например, в реакции термоядерного синтеза

$$^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} = {}^{4}\mathrm{He} + n + Q$$

ядро гелия $^{4}\mathrm{He}$ (α-частица) и нейтрон получают кинетическую энергию $Q \approx \approx 17.6\,\text{МэВ}$. При этом относительное изменение массы $\Delta m/m = 3 \cdot 10^{-3}$.

В природе происходят и такие процессы, в которых $\Delta m/m$ достигает десятков процентов и даже может быть $\Delta m/m = 1$, т.е. частицы с отличной от нуля массой покоя превращаются в безмассовые частицы. Примером может служить превращение электронно-позитронных пар в гамма-кванты

$$e^{+} + e^{-} \to 2\gamma.$$

Таким образом, в общем случае масса покоя частиц (а следовательно, и макроскопических тел) не сохраняется.

Во всех перечисленных процессах та или иная часть энергии покоя исходных частиц $\Delta\mathcal{E}_0 = \Delta m c^2$ превращалась в кинетическую энергию образовавшихся частиц (включая фотоны) и через нее — в другие виды энергии. Это показывает физическую реальность энергии покоя.

Вернемся к выражениям для импульса и энергии свободной частицы. Из (1.38), (1.40) имеем

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{1 - v^2/c^2}\,, \quad p^2 = \frac{m^2v^2}{1 - v^2/c^2}\,.$$

Отсюда легко получить следующее релятивистское соотношение

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2\,. \tag{1.46}$$

Поскольку энергия, выраженная через импульс, есть функция Гамильтона H, то

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,. \tag{1.47}$$

При нерелятивистском движении $v \ll c$ и

$$H \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}, \tag{1.48}$$

т.е. за вычетом энергии покоя, получаем известное выражение нерелятивистской механики.

Укажем еще одно соотношение между энергией и импульсом частицы, которое легко получить из (1.38), (1.40):

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}\,. \tag{1.49}$$

Из (1.40) следует, что для частицы с ненулевой массой покоя, $m \neq 0$, при стремлении скорости частицы к скорости света $v \to c$, энергия частицы возрастает до бесконечности $\mathcal{E} \to \infty$. Очевидно, что такой результат показывает невозможность движения частицы с $m \neq 0$ со скоростью света (частице нельзя сообщить бесконечную энергию). Если же частица имеет скорость $v = c$, то ее масса равна нулю. Действительно, согласно (1.49) импульс и энергия такой частицы связаны соотношением

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}\,, \tag{1.50}$$

и из (1.46) следует, что $m = 0$.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 5; [2], гл. 11, § 5; [3] § 9.

1.8. Четырехмерные векторы и тензоры

Время и координаты события можно рассматривать как координаты точки в четырехмерном пространстве. Перенумеруем их верхними индексами от 0 до 3:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{1.51}$$

По определению набор четырех величин x^i, $i = 0, 1, 2, 3$ называется четырехмерным радиус-вектором (или, сокращенно, 4-радиус-вектором). Для 4-радиус-вектора используется обозначение $x^i = (ct, \mathbf{r})$. При переходе к новой системе отсчета компоненты 4-радиус-вектора преобразуются в соответствии с (1.16), так что

$$x'^i = \sum_{i=0}^{3} \alpha^i{}_k x^k\,. \tag{1.52}$$

Далее будем предполагать, что по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, производится суммирование (эти индексы называют *немыми*), а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять вверху, а другой — внизу. В соответствии с этим правилом вместо (1.52) пишем

$$x'^i = \alpha^i{}_k x^k\,. \tag{1.53}$$

Матрицу преобразования $\alpha^i{}_k$ найдем, сравнивая (1.53) с (1.16):

$$\alpha^i{}_k = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & -\dfrac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.54}$$

Определим теперь произвольный 4-вектор как набор четырех величин $A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, которые при преобразованиях четырехмерной системы координат (при переходе в другую ИСО) преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора:

$$A'^i = \alpha^i{}_k A^k\,. \tag{1.55}$$

Для 4-вектора используется также обозначение $A^i = (A^0, \mathbf{A})$. Компонента A^0 называется временнóй, компоненты A^1, A^2, A^3 — пространственными.

Запишем в четырехмерных обозначениях квадрат интервала (1.20):

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\,. \tag{1.56}$$

Напомним, что s^2 является инвариантом (т.е. не меняется при преобразовании четырехмерной системы координат), поэтому инвариантом является следующая комбинация компонент любого 4-вектора

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2\,. \tag{1.57}$$

Для удобства записи выражений типа (1.56), (1.57) вводят два сорта компонент 4-векторов — контравариантные и ковариантные. Контравариантные компоненты (те, которые использовались выше) обозначаются верхними индексами (A^i), а ковариантные — нижними индексами (A_i). При этом по определению

$$A_0 = A^0, \qquad A_{1,2,3} = -A^{1,2,3}. \tag{1.58}$$

Запишем преобразование Лоренца для ковариантных компонент вектора:

$$A'_i = \alpha_i{}^k A_k\,. \tag{1.59}$$

Матрица преобразования

$$\alpha_i{}^k = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \dfrac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.60}$$

С помощью ко- и контравариантных компонент s^2 записывается в виде

$$s^2 = x^i x_i = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3\,. \qquad (1.61)$$

По определению это выражение называется квадратом 4-радиус-вектора. Квадрат произвольного 4-вектора A_i есть

$$A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3\,. \qquad (1.62)$$

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов $A^i = (A^0, \mathbf{A})$ и $B^i = (B^0, \mathbf{B})$:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^0 B^0 - \mathbf{AB}\,. \qquad (1.63)$$

При этом, как следует из (1.58), его можно записать как в виде $A^i B_i$, так и в виде $A_i B^i$, — результат от этого не меняется. Скалярное произведение является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца. Это обстоятельство можно проверить непосредственно, но оно заранее очевидно (по аналогии с квадратом $A^i A_i$) из того, что все 4-векторы преобразуются по одинаковому закону. Термин «скаляр» является синонимом термина «инвариант» — величины, имеющей одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета, $A'^i A'_i = A^i A_i$ и т.д.

Рассмотрим свойства матриц преобразований Лоренца.

1. Из (1.54) и (1.60) следует симметрия

$$\alpha^i{}_k = \alpha^k{}_i, \qquad \alpha_i{}^k = \alpha_k{}^i\,. \qquad (1.64)$$

2. Преобразование, обратное преобразованию Лоренца для контравариантного вектора (1.55), запишем как

$$A^i = (\alpha^{-1})^i{}_k A'^k\,. \qquad (1.65)$$

Но из физических соображений очевидно, что $\alpha^{-1}(V) = \alpha(-V)$ (см. (1.17), (1.16)), поэтому, принимая во внимание (1.54) и (1.60), имеем

$$(\alpha^{-1}(V))^i{}_k = (\alpha(-V))^i{}_k = \alpha(V)_i{}^k\,,$$

или

$$(\alpha^{-1})^i{}_k = \alpha_i{}^k\,. \qquad (1.66)$$

Таким образом, обратное преобразование для контравариантного вектора совпадает с прямым преобразованием для ковариантного вектора.

3. Непосредственным вычислением можно показать, что матрицы (1.54), (1.60) имеют единичный детерминант

$$\det(\alpha^i{}_k) = 1\,. \qquad (1.67)$$

Рассмотрим, как преобразуется элемент четырехмерного объема

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtd\tilde{V} \tag{1.68}$$

при преобразовании Лоренца. Элемент $d\Omega'$ связан с $d\Omega$ через якобиан преобразования (1.53)

$$d\Omega' = \left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right| d\Omega\,.$$

Вычисляя якобиан

$$\left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \det({\alpha^i}_k)$$

и учитывая (1.67), убеждаемся, что

$$d\Omega' = d\Omega. \tag{1.69}$$

Примем следующее определение: 4-тензором 2-го ранга называется совокупность 16 величин, которые при переходе в другую инерциальную систему преобразуются как произведения компонент двух 4-векторов. Можно определить и 4-тензор n-го ранга как совокупность 4^n величин, которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент n 4-векторов. При $n = 0$ введенная так величина является скаляром, при $n = 1$ — вектором, при $n = 2$ — тензором 2-го ранга, при $n = 3$ — тензором 3-го ранга и т.д.

Вернемся к тензору 2-го ранга. Поскольку произведение компонент двух векторов A^i и B^k преобразуются как

$$A'^i B'^k = {\alpha^i}_m {\alpha^k}_n A^m B^n\,, \tag{1.70}$$

то, согласно определению,

$$T'^{ik} = {\alpha^i}_m {\alpha^k}_n T^{mn}\,. \tag{1.71}$$

Тензоры 2-го ранга могут быть трех видов: контравариантные (T^{ik}), ковариантные (T_{ik}) и смешанные (${T^i}_k$ и ${T_i}^k$). При этом, вообще говоря, ${T^i}_k \neq {T_i}^k$, поэтому надо следить за тем, какой индекс — первый или второй — стоит вверху, а какой — внизу. В соответствии с этим возможны следующие законы преобразования 4-тензоров 2-го ранга:

$$
\begin{aligned}
&T'^{ik} = \alpha^i{}_m \alpha^k{}_n T^{mn}\,, \quad T'{}_{ik} = \alpha_i{}^m \alpha_k{}^n T_{mn}\,,\\
&T'^i{}_k = \alpha^i{}_m \alpha_k{}^n T^m{}_n\,, \quad T'{}_i{}^k = \alpha_i{}^m \alpha^k{}_n T_m{}^n\,.
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временнóго индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1,2,3) меняет знак компоненты. Так,

$$
\begin{aligned}
&T_{00} = T^{00}, \quad T_{01} = -T^{01}, \quad T_{11} = T^{11}, \ldots,\\
&T_0{}^0 = T^{00}, \quad T_0{}^1 = T^{01}, \quad T^0{}_1 = -T^{01}, \quad T_1{}^1 = -T^{11}, \ldots.
\end{aligned}
$$

Следует помнить, что во всяком тензорном равенстве выражения с обеих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) свободные, т.е. не немые, индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения.

Из компонент тензора A^{ik} можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

(при этом, конечно, $A^i{}_i = A_i{}^i$). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как о *свертывании* или *упрощении* тензора.

Операцией свертывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра $A^i B_i$ из тензора $A^i B_k$. Вообще, всякое свертывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например, $A^i{}_{kli}$ есть тензор 2-го ранга, $A^i{}_k B^k$ — 4-вектор, $A^{ik}{}_{ik}$ — скаляр и т.д.

Одним из наиболее простых тензоров 2-го ранга является *метрический тензор* g_{ik} :

$$
g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\tag{1.73}
$$

Преобразуя этот тензор с помощью матрицы (1.60) к другой инерциальной системе

$$g'_{ik} = \alpha_i{}^m \alpha_k{}^n g_{mn},$$

получим $g'_{ik} = g_{ik}$ (проделайте вычисления!). Таким образом, тензор g_{ik} — инвариантный, его компоненты одинаковы во всех системах отсчета. Поднимая один индекс у g_{ik} по правилу (1.58), получаем единичный тензор δ^i_k:

$$g^i{}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \delta^i_k. \tag{1.74}$$

Расположение верхнего и нижнего индексов у единичной матрицы, разумеется, произвольно, поэтому используется обозначение δ^i_k. Компоненты тензора δ^i_k, как и компоненты g_{ik}, одинаковы во всех системах координат. Если поднять оба индекса у метрического тензора, то получим $g^{ik} = g_{ik}$ — контравариантные компоненты совпадают с ковариантными.

С помощью метрического тензора производится опускание и поднятие индекса у любого 4-вектора или 4-тензора: из (1.58), (1.73) следует, что

$$A_i = g_{ik}A^k, \quad A^i = g^{ik}A_k.$$

Квадрат интервала может быть записан через g_{ik} как

$$s^2 = g_{ik}x^i x^k, \tag{1.75}$$

а скалярное произведение как

$$A_i B^i = g_{ik}A^i B^k. \tag{1.76}$$

Формула (1.75) поясняет, почему тензор g_{ik} называется метрическим: он позволяет определить инвариантное «расстояние» между двумя точками в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, или, как говорят, установить метрику этого пространства.

Наряду с тензорами δ^i_k, g^{ik}, g_{ik} одинаковые компоненты во всех системах координат имеет совершенно антисимметричный единичный 4-тензор четвертого ранга e^{iklm}. Он определяется по аналогии с соответствующим трехмерным тензором $e_{\alpha\beta\gamma}$ двумя условиями:

1. $e^{0123} = 1$.
2. e^{iklm} меняет знак при перестановке любых двух индексов.

В результате остаются отличными от нуля (и равными ± 1) только те компоненты, у которых все 4 индекса различны; их число равно $4! = 24$.

4-тензор $T^{ik\ldots lm}$ называется истинным, или просто тензором, если при инверсии пространственных координат (преобразование $x'^0 = x^0$, $x'^\alpha = -x^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$) он преобразуется как произведение координат $x^i x^k \ldots x^l x^m$. Если же при таком преобразовании тензор приобретает дополнительный множитель -1, он называется псевдотензором. В соответствии с этим определением g_{ik} — истинный тензор, а e^{iklm} — псевдотензор (проверьте!).

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 4; [2], гл. 11, § 3; [3] § 6; [4] § 73.

1.9. Тензорные свойства дифференциальных операций

Рассмотрим операторы дифференцирования по контравариантным компонентам 4-радиус-вектора

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \qquad i = 0, 1, 2, 3,$$

и найдем, как они преобразуются при переходе к новой системе отсчета. По правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\,.$$

Вычислим $\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}$. Для этого запишем правило обратного преобразования для контравариантного вектора (1.65)

$$x^k = (\alpha^{-1})^k{}_i x'^i\,,$$

тогда

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = (\alpha^{-1})^k{}_i\,.$$

Но по свойствам (1.66), (1.64)

$$(\alpha^{-1})^k{}_i = \alpha_k{}^i = \alpha_i{}^k\,,$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \alpha_i{}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\,. \tag{1.77}$$

Сравнивая последнее равенство с (1.59) видим, что закон преобразования производных (1.77) такой же, как у ковариантных компонент 4-вектора, следовательно, оператор $\partial/\partial x^i$ представляет собой ковариантный вектор. Его пространственная часть совпадает с оператором ∇, а временна́я представляет собой $\partial/\partial x^0$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)\,. \tag{1.78}$$

Соответственно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)\,. \tag{1.79}$$

Теперь становятся очевидными следующие утверждения.

1. Если φ — скалярная функция, то $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ — ковариантный вектор. Этот результат можно получить из других рассуждений. Запишем дифференциал φ, который является скаляром:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i\,.$$

Из вида правой части (скалярное произведение двух 4-векторов) следует, что оператор $\partial/\partial x^i$ представляет собой ковариантный вектор.

2. Производная

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$$

есть смешанный тензор 2-го ранга, а производная

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k \partial x^l}$$

— смешанный тензор 3-го ранга.

3. Производная

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}$$

— четырехмерная дивергенция — есть скалярная (инвариантная) величина. В обычных обозначениях

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}. \tag{1.80}$$

4. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i}$ — скалярный оператор, который отличается знаком от оператора Даламбера

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = -\Box\,. \tag{1.81}$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 4; [2], гл. 11, § 3; [3] § 6; [4] § 74.

1.10. Примеры четырехмерных векторов

Рассмотрим примеры 4-векторов, которые встречаются в релятивистской механике и электродинамике.

1. Набор четырех величин — 4-радиус-вектор —

$$x^i = (ct, \mathbf{r})$$

является 4-вектором по определению,

2. Имея 4-радиус-вектор, введем четырехмерную скорость (4-скорость). Очевидно, что при делении dx^i на dt, будет получена величина $\frac{dx^i}{dt}$, которая не является 4-вектором (поскольку dx^i — 4-вектор, а dt — не скаляр). Величину с нужными трансформационными свойствами и размерностью скорости получим при делении dx^i на инвариант $ds/c = d\tau$, где

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

— бесконечно малый интервал, $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — собственное время. Производную

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{dx^i}{dt} \tag{1.82}$$

называют четырехмерной скоростью. Запишем компоненты 4-скорости через трехмерную скорость

$$u^i = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right). \tag{1.83}$$

Из последнего соотношения находим

$$u^iu_i = c^2. \tag{1.84}$$

Компоненты 4-скорости в системе K' могут быть выражены через компоненты в системе K по общему правилу

$$u'^i = \alpha^i{}_k u^k.$$

На практике удобно не вычислять u'^i с помощью матрицы преобразования $\alpha^i{}_k$ (1.54), а заменить в формулах (1.17) для преобразований Лоренца

$$t \to \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad \mathbf{r} \to \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Трансформационные формулы для компонент 4-скорости связывают компоненты трехмерной скорости в системах K и K' и позволяют получить (проверьте!) релятивистский закон преобразования скоростей (1.23).

3. Умножив 4-скорость частицы на ее массу, получим 4-вектор, который называется четырехмерным импульсом:

$$p^i = mu^i, \tag{1.85}$$

или

$$p^i = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right). \tag{1.86}$$

Поскольку

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathcal{E}, \quad \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathbf{p},$$

то четырехмерный импульс можно записать в виде

$$p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\,,\, \mathbf{p}\right). \tag{1.87}$$

Другими словами, энергия (деленная на c) и трехмерный импульс образуют четырехмерный вектор, который называется 4-импульсом.

Этот нетривиальный факт позволяет получить, опираясь на свойства 4-векторов, ряд соотношений, в которые входят энергия и импульс частицы. Например, вычисляя квадрат 4-импульса и используя для p^i формулу (1.87), приходим к соотношению (1.46)

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2\,. \tag{1.88}$$

Используя трансформационные свойства 4-векторов, можно найти закон преобразования энергии и импульса при переходе от одной инерциальной системы к другой. Для этого заменим в (1.17) $t \to \mathcal{E}/c^2$, $\mathbf{r} \to \mathbf{p}$, что приводит к

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{\frac{\mathcal{E}'}{c^2} + \frac{V}{c^2}p'_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad p_x = \frac{p'_x + V\frac{\mathcal{E}'}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \tag{1.89}$$

При малых скоростях частицы ($v \ll c$) и системы K' ($V \ll c$), что означает также $v' \ll c$, формулы (1.89) переходят в известные нерелятивистские формулы. Записав приближенные равенства

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \qquad \mathcal{E}' \approx mc^2 + \frac{mv'^2}{2}$$

и учитывая в (1.89) только главные по v/c члены, получаем классические законы преобразования импульса

$$\mathbf{p}_{\text{кл}} = \mathbf{p}'_{\text{кл}} + m\mathbf{V}$$

и энергии (теорему Кёнига)

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + p'_xV + \frac{mV^2}{2}\,.$$

4. Четырехмерным ускорением называется производная 4-скорости по собственному времени

$$w^i = \frac{du^i}{d\tau}\,. \tag{1.90}$$

Дифференцируя по τ квадрат 4-скорости $u^i u_i = c^2$:

$$\frac{d}{d\tau}(u^i u_i) = 2u^i w_i = 0\,,$$

приходим к заключению, что четырехмерные скорость и ускорение ортогональны друг другу.

5. Четырехмерной силой называется величина

$$g^i = \frac{dp^i}{d\tau}\,. \tag{1.91}$$

Чтобы выразить компоненты g^i через трехмерные величины, используем равенство

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \frac{dp^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dp^i}{dt}\,.$$

Но, например,

$$\frac{dp^1}{dt} = \frac{dp_x}{dt} = F_x,$$

так что пространственные компоненты выражаются через трехмерную силу $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$. Временная компонента выражается через производную от энергии по времени:

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt}\,.$$

Чтобы преобразовать эту величину, продифференцируем по времени соотношение (1.88):

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{p}\frac{d\mathbf{p}}{dt}\,.$$

Учитывая, что $\mathbf{p} = \dfrac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}$, находим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v}\,. \tag{1.92}$$

Последнее соотношение, выражающее изменение энергии через работу силы (обратим внимание, что оно не содержит c) справедливо и в ньютоновской механике. Теперь имеем следующее выражение для четырехмерной силы в записи через трехмерные величины:

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{1.93}$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 4; [2], гл. 11, § 4; [3] § 7; [4] § 77.

1.11. Релятивистская природа силы Лоренца

Найдем релятивистский закон преобразования трехмерной силы $\mathbf{F}$ при переходе к другой ИСО, опираясь на то, что компоненты g^i образуют 4-вектор. Поскольку $g^{1,2,3}$ преобразуются как x, y, z соответственно, можем записать:

$$\frac{F_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\frac{F'_x}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} + \frac{V}{c}\frac{\mathbf{F}'\mathbf{v}'}{c\sqrt{1-v'^2/c^2}}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,, \quad \frac{F_{y,z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F'_{y,z}}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\,.$$

Преобразуем эти формулы. Используем для этого трансформационное правило для компонент u^i

$$\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v'_y}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\,.$$

Отсюда, принимая во внимание релятивистский закон сложения скоростей (1.23), имеем

$$\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{v_y}{v'_y} = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}\,. \tag{1.94}$$

Собирая результаты, получаем:

$$F_x = \frac{F'_x + (\mathbf{F}'\mathbf{v}')\frac{V}{c^2}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}\,, \quad F_{y,z} = F'_{y,z}\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}\,. \tag{1.95}$$

Закон (1.95) преобразования компонент силы позволяет продемонстрировать релятивистскую природу силы Лоренца. Раскроем скобки в скалярном произведении в (1.95)

$$F_x = F'_x + \frac{v'_y}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}F'_y\frac{V}{c^2} + \frac{v'_z}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}F'_z\frac{V}{c^2}\,.$$

Выразим правую часть через компоненты скорости $\mathbf{v}$, а не $\mathbf{v}'$. Поскольку из (1.94) следует равенство

$$\frac{v'_{y,z}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}} = \frac{v_{y,z}}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

то для F_x получаем:

$$F_x = F'_x + \frac{v_y}{c}\frac{F'_y V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{v_z}{c}\frac{F'_z V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{1.96}$$

Чтобы выразить через нештрихованную скорость компоненты $F_{y,z}$, используем релятивистский закон сложения скоростей (1.23). Преобразуя знаменатель в (1.95)

$$1 + \frac{v'_x V}{c^2} = 1 + \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}\ \frac{V}{c^2} = \frac{1 - V^2/c^2}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}\,,$$

приводим $F_{y,z}$ к виду:

$$F_{y,z} = \frac{F'_{y,z}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{v_x}{c}\ \frac{F'_{y,z}\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \qquad (1.97)$$

Преобразования (1.96), (1.97) можно записать в векторном виде (проверьте!):

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi} + \frac{1}{c}[\mathbf{vG}], \qquad (1.98)$$

$$\mathbf{\Phi} = (F'_x, \frac{F'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{F'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}), \quad \mathbf{G} = (0, \frac{-\frac{V}{c}F'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{\frac{V}{c}F'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}). \qquad (1.99)$$

Предположим, что в системе K' сила $\mathbf{F}'$ не зависит от скорости частицы. Согласно формулам (1.98), (1.99), в системе K возникает зависимость силы от скорости, причем часть силы, зависящая от скорости $\mathbf{v}$, перпендикулярна $\mathbf{v}$. Указанный эффект является релятивистским и исчезает при $v/c \to 0$.

Применим этот результат СТО к электродинамике. Пусть в системе K' на заряд e действует только электростатическая сила $\mathbf{F}' = e\mathbf{E}'$. Сила, действующая на заряд в системе K, относительно которой он движется со скоростью $\mathbf{v}$, дается формулой (1.98). Выделив в $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{G}$ множитель e, которому, очевидно, пропорциональна сила $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{\Phi} = e\mathbf{E}, \qquad \mathbf{G} = e\mathbf{B},$$

получим силу Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vB}].$$

При этом из (1.99) видно, что напряженности преобразуются по закону

$$\mathbf{E} = (E'_x, \frac{E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}), \quad \mathbf{B} = (0, \frac{-\frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}})$$

(ср. (2.20), (2.21) ниже). Таким образом, если в некоторой системе отсчета (относительно которой заряды покоятся), есть только электрическое поле, то в любой движущейся относительно нее системе существуют и электрическое, и магнитное поля. Следовательно, магнитное поле возникает без магнитных зарядов. Его появление есть следствие преобразований Лоренца.

2. Электродинамика в релятивистских обозначениях

Согласно принципу относительности Эйнштейна уравнения, выражающие физические законы, должны сохранять свой вид при переходе от одной ИСО к другой, т.е. быть ковариантными относительно преобразований Лоренца. Цель настоящего раздела — записать уравнения электродинамики в форме, явно показывающей их ковариантность.

2.1. Четырехмерный вектор тока

Заряд является инвариантной величиной, не изменяющейся при переходе от одной системы отсчета к другой. Соответственно, уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{2.1}$$

справедливо в любой системе отсчета. Введем обозначение

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{2.2}$$

(имея в виду показать ниже, что четыре величины $c\rho, j_x, j_y, j_z$ образуют 4-вектор) и перепишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0, \tag{2.3}$$

где $x^i = (ct, \mathbf{r})$ — 4-радиус-вектор. Таким образом, величина $\dfrac{\partial j^i}{\partial x^i}$, которая по виду представляет собой четырехмерное скалярное произведение, имеет одинаковое значение во всех системах отсчета (равна нулю). Поскольку известно, что оператор $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ по тензорным свойствам представляет собой 4-вектор, приходим к заключению: j^i тоже есть 4-вектор.

К тому же результату можно прийти с помощью следующих рассуждений. Заряд

$$de = \rho d\tilde{V}$$

есть инвариантная (скалярная) величина, одинаковая во всех системах отсчета. Следовательно,

$$de dx^i = \rho d\tilde{V} dt \frac{dx^i}{dt}$$

является 4-вектором. Но

$$dtd\tilde{V} = \frac{1}{c} cdtd\tilde{V} = \frac{d\Omega}{c}$$

— скаляр, поскольку $d\Omega$ не меняется при преобразовании Лоренца (см. (1.69)), поэтому

$$\rho \frac{dx^i}{dt} = (c\rho, \rho\mathbf{v}) = (c\rho, \mathbf{j})$$

— 4-вектор.

Запишем закон преобразования компонент четырехмерного тока. Очевидно, что ρ преобразуется как t, а $\mathbf{j}$ — как $\mathbf{r}$, т.е.

$$\rho = \frac{\rho' + \frac{V}{c^2} j'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad j_x = \frac{j'_x + V\rho'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad j_y = j'_y, \quad j_z = j'_z.$$

Пусть в системе K' заряды покоятся: $\mathbf{j}' = 0$. Тогда в системе K

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad j_x = \frac{V\rho'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \rho V, \quad j_y = j_z = 0. \tag{2.4}$$

Таким образом, плотность тока в системе K выражается через скорость движения K': $\mathbf{j} = \rho\mathbf{V}$. Умножив обе части первого уравнения в (2.4) на элемент объема $d\tilde{V}$:

$$\rho d\tilde{V} = \frac{\rho' d\tilde{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

получим с учетом (1.19):

$$\rho d\tilde{V} = \rho' d\tilde{V}'.$$

Последняя формула наглядно показывает, что изменение плотности заряда связано с лоренцевым уменьшением объема.

Рекомендуемая литература: [2], гл. 11, § 7; [4] § 78.

2.2. Четырехмерный потенциал электромагнитного поля

Напомним, что уравнения для потенциалов $\mathbf{A}, \varphi$ электромагнитного поля, на которые наложено условие Лоренца

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{2.5}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \Box\varphi &= -4\pi\rho, \\ \Box\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} \tag{2.7}$$

— оператор Даламбера. Если ввести обозначение

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A}), \tag{2.8}$$

то уравнения (2.6) можно записать в краткой форме

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} A^i = \frac{4\pi}{c} j^i. \tag{2.9}$$

Выше было установлено, что $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$ — 4-вектор, а $\dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k}$ — скалярный оператор. Поэтому из (2.6) следует, что A^i представляет собой четырехмерный вектор, в противном случае уравнения для потенциалов не могут быть справедливыми. 4-вектор A^i называется четырехмерным потенциалом электромагнитного поля. С его помощью условие Лоренца переписывается в виде равенства нулю четырехмерной дивергенции:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0\,. \tag{2.10}$$

Потенциалы поля определены неоднозначно, при замене

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\to \mathbf{A} + \nabla\chi, \\ \varphi &\to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.11}$$

векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не изменяются. Такая инвариантность называется градиентной. Градиентное преобразование потенциалов тоже может быть записано в четырехмерной форме

$$A^i \to A^i - \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\,, \tag{2.12}$$

где $\chi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ — произвольный дифференцируемый 4-скаляр.

Поскольку $\varphi, \mathbf{A}$ есть компоненты 4-вектора, то закон их преобразования при переходе к другой инерциальной системе отсчета имеет вид

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad A_y = A'_y\,, \quad A_z = A'_z\,. \tag{2.13}$$

Комбинация $\varphi^2 - \mathbf{A}^2$ инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Рекомендуемая литература: [2], гл. 11, §7; [3] §6; [4] §82.

2.3. Тензор электромагнитного поля. Преобразования Лоренца для поля. Инварианты поля

Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через потенциалы поля по формулам:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\,, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\,. \tag{2.14}$$

Выпишем компоненту E_x:

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,.$$

Последнее выражение перепишем через производные от ковариантных компонент 4-потенциала $A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$ по контравариантным компонентам 4-радиус-вектора $x_i = (ct, \mathbf{r})$:

$$E_x = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}\,.$$

Аналогичные выражения для E_y, E_z имеют вид:

$$E_y = \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2}\,, \qquad E_z = \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3}\,.$$

Точно так же можно переписать компоненты $\mathbf{B}$. Для B_x из (2.14) имеем

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\,,$$

или

$$B_x = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2}\,.$$

Для B_y, B_z получаем следующие выражения

$$B_y = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}\,, \quad B_z = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1}\,.$$

Введем величину

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,, \tag{2.15}$$

которая, очевидно, является тензором второго ранга. Тензор (2.15) называется тензором электромагнитного поля и играет важную роль в электродинамике. Из определения очевидно, что тензор электромагнитного поля антисимметричен:

$$F_{ik} = -F_{ki}\,, \tag{2.16}$$

т.е. имеет 6 независимых компонент. Из приведенных выше формул следует, что компоненты тензора F_{ik} (а значит и F^{ik}) выражаются через компоненты $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Итак, все компоненты векторов электрического и магнитного поля оказываются компонентами одной тензорной величины F_{ik}. Ниже будет показано, что уравнения Максвелла можно записать в четырехмерном виде как систему уравнений для тензора F_{ik}.

Найдем формулы преобразования для векторов поля, т.е. формулы, по которым можно определить напряженности поля в одной инерциальной системе отсчета, зная их в другой системе. Эти формулы легко найти, исходя из того, что векторы $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ представляют собой компоненты 4-тензора F^{ik}. Согласно закону преобразования тензоров 2-го ранга (1.71)

$$F'^{ik} = \alpha^i{}_m \alpha^k{}_n F^{mn} \,. \tag{2.19}$$

Подставляя в последнее выражение (1.54), (2.18), можно выразить новые компоненты через старые. Однако в техническом отношении проще непосредственно воспользоваться определением тензора 2-го ранга, согласно которому F^{ik} преобразуется как произведение $A^i A^k$, например, F^{10} преобразуется как $A^1 A^0$. Используя закон преобразования для 4-вектора

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad A^2 = A'^2\,, \quad A^3 = A'^3\,,$$

получим

$$A^1 A^0 = \frac{A'^1 A'^0 + \frac{V}{c} A'^0 A'^0 + \frac{V}{c} A'^1 A'^1 + \frac{V^2}{c^2} A'^0 A'^1}{1 - V^2/c^2}\,.$$

Это означает, что

$$F^{10} = \frac{F'^{10} + \frac{V}{c} F'^{00} + \frac{V}{c} F'^{11} + \frac{V^2}{c^2} F'^{01}}{1 - V^2/c^2}\,.$$

Но $F'^{00} = F'^{11} = 0$, $F'^{01} = -F'^{10}$, так что $F^{10} = F'^{10}$, т.е.

$$E_x = E'_x\,.$$

Точно так же находим закон преобразования других компонент

$$E_y = F^{20} = \frac{F'^{20} + \frac{V}{c}F'^{21}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{E'_y + \frac{V}{c}B'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,,$$
$$E_z = F^{30} = \frac{F'^{30} + \frac{V}{c}F'^{31}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{E'_z - \frac{V}{c}B'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,.$$

Выпишем еще раз закон преобразования компонент электрического вектора

$$E_x = E'_x\,, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}B'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}B'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,. \tag{2.20}$$

Аналогичное рассмотрение приводит к следующему закону преобразования для компонент $\mathbf{B}$

$$B_x = B'_x\,, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,. \tag{2.21}$$

Отметим, что выражения (2.21) получаются из (2.20) при замене

$$\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{B}, \quad V \to -V\,.$$

Из (2.20), (2.21) следует, что у векторов поля, в отличие от координат, не преобразуются продольные составляющие.

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны. Существуют, однако, инвариантные комбинации векторов $\mathbf{E}, \mathbf{B}$, остающиеся неизменными при преобразованиях от одной инерциальной системы отсчета к другой. Их можно найти, исходя из четырехмерного представления поля с помощью тензора F^{ik}. Свертка тензора, являющаяся инвариантом — его след ${F^i}_i$ — в данном случае обращается в нуль. Нетривиальным инвариантом является скалярный квадрат тензора F^{ik}, т.е. его произведение на ковариантный тензор

$$F^{ik}F_{ik} = \text{inv.} \tag{2.22}$$

Второй независимый инвариант строится с помощью единичного совершенно антисимметричного тензора e_{iklm}:

$$e_{iklm}F^{ik}F^{lm} = \text{inv.} \tag{2.23}$$

Произведения (2.22), (2.23) нетрудно выразить через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ с помощью (2.17):

$$F_{ik}F^{ik} = 2(B^2 - E^2), \qquad e_{iklm}F^{ik}F^{lm} = 2\mathbf{EB}.$$

Таким образом, релятивистскими инвариантами являются:

$$\begin{aligned} &E^2 - B^2 = \mathrm{inv}, \\ &\mathbf{EB} = \mathrm{inv}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Остальные инвариантные величины, составленные из компонент тензора F^{ik} либо обращаются в нуль, либо выражаются через указанные два инварианта поля. Найденные величины по разному ведут себя при отражении пространственных или временной оси. Разность $E^2 - B^2$ является инвариантом и по отношению к отражению осей. Произведение $\mathbf{EB}$ меняет знак при отражении трех пространственных или временной оси: в первом случае $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$, а во втором случае $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$, $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$. Поэтому $\mathbf{EB}$ — не истинный скаляр, а псевдоскаляр. Однако $\mathbf{EB}$ остается инвариантным относительно отражения всех четырех осей.

Крайним выражением относительности электрического и магнитного полей является возможность переходом в другую систему отсчета избавиться от одного из них. Но этого можно достичь не всегда. Действительно, пусть в системе K' магнитное поле отсутствует: $\mathbf{B}' = 0$. Согласно (2.24), это означает, что в системе K

$$E^2 - B^2 > 0\,, \qquad \mathbf{EB} = 0\,,$$

т.е. $E > B$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Таким образом, выбором системы отсчета можно обратить в нуль меньшее по величине из двух взаимно перпендикулярных полей.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 10; [2], гл. 11, § 8,9; [3] § 24; [4] § 74.

2.4. Эффект Доплера

Эффектом Доплера называется изменение частоты излучения, воспринимаемой наблюдателем, при относительном движении приемника и источника.

Пусть в системе K распространяется плоская монохроматическая волна. Компоненты напряженности электрического и магнитного полей в этом случае имеют вид

$$f_i = \mathrm{Re}\left\{ f_{0i} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \right\}\,,$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — волновой вектор, $k = \omega/c$ — волновое число. Так как волновое уравнение инвариантно относительно преобразований Лоренца, то поле в системе K' тоже будет представлять собой плоскую монохроматическую волну, компоненты полей в которой даются выражением

$$f'_i = \mathrm{Re}\left\{ f'_{0i} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega' t')} \right\}\,.$$

Продольные компоненты поля не меняются при переходе к другой инерциальной системе: $E_x = E'_x$, или

$$\mathrm{Re}\left\{E_{0x}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{E'_{0x}e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r}'-\omega' t')}\right\}\,.$$

Очевидно, что последнее равенство может выполняться в любой точке пространства в любой момент времени только в том случае, если

$$\mathbf{kr} - \omega t = \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega' t',$$

т.е. фаза волны $\varphi = -(\mathbf{kr} - \omega t)$ является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

Введем обозначение

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right). \tag{2.25}$$

Тогда фазу волны можно представить как

$$\varphi = k^i x_i\,. \tag{2.26}$$

Поскольку правая часть здесь имеет вид скалярного произведения двух 4-векторов, а фаза φ — инвариант (скалярная величина), то приходим к выводу, что k^i есть 4-вектор. Теперь можно найти связь между частотой волны ω_0 в системе источника и частотой ω той же волны в системе наблюдателя, используя трансформационные свойства 4-векторов. Пусть система K связана с наблюдателем, а система K' — с источником, и источник движется относительно наблюдателя со скоростью V. Запишем закон преобразования временно́й компоненты k^0:

$$k'^0 = \frac{k^0 - \frac{V}{c}k^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \text{или} \quad \frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}k_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{2.27}$$

Частота ω' измеряется в той системе отсчета, относительно которой источник покоится, т.е. это собственная частота: $\omega' = \omega_0$. Введем θ — угол распространения волны относительно $\mathbf{V}$ в системе наблюдателя, так что

$$k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta.$$

Теперь находим

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta}\,. \tag{2.28}$$

Эта формула описывает эффект Доплера при любой относительной скорости источника и приемника.

При малых скоростях $V \ll c$ и значениях угла θ не слишком близких к $\pi/2$ (таких, что $\dfrac{V}{c}\cos\theta \gg \dfrac{V^2}{c^2}$) из (2.28) получаем нерелятивистскую формулу

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\cos\theta\right) . \tag{2.29}$$

Таким образом, при $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (приближение источника) $\omega > \omega_0$, т.е. частота возрастает, а при $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$ (удаление источника) $\omega < \omega_0$, т.е. частота убывает; в этом состоит продольный эффект Доплера. Если относительная скорость направлена перпендикулярно лучу зрения ($\theta = \pi/2,\ \cos\theta = 0$), то

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right) \tag{2.30}$$

— уменьшение частоты квадратично по V/c (поперечный эффект Доплера). Поперечный эффект Доплера является релятивистским, т.е. не может быть обнаружен при нерелятивистском анализе.

Рекомендуемая литература: [2], гл. 11, § 12; [3] § 48; [4] § 77.

2.5. Уравнения Максвелла в ковариантной форме

Уравнения Максвелла

$$\begin{array}{ll}
(2.31.1) & \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho\,, \\
(2.31.2) & \operatorname{rot}\mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,, \\
(2.31.3) & \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,, \\
(2.31.4) & \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}
\end{array} \tag{2.31}$$

справедливы в любой системе отсчета, поэтому их можно переписать в четырехмерной форме в виде уравнений, связывающих 4-тензорные величины одинаковой размерности. Используя уравнение (2.9) для 4-потенциала $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i \tag{2.32}$$

и условие Лоренца (2.10):

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0\,, \tag{2.33}$$

преобразуем левую часть (2.32) к виду

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x_k} - \frac{\partial A^k}{\partial x_i}\right) .$$

Выражение в скобках здесь есть тензор электромагнитного поля $F^{ki} = -F^{ik}$ (см.(2.18)), так что получаем уравнение

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{2.34}$$

Записав четыре (с $i = 0, 1, 2, 3$) уравнения в трехмерной форме, можно убедиться, что они эквивалентны первой (неоднородной) паре уравнений Максвелла (2.31.1), (2.31.2). Например, при $i = 0$ имеем:

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -4\pi\rho\,.$$

Учитывая, что $F^{01} = -E_x,\ F^{02} = -E_x,\ F^{03} = -E_x,\ j^0 = c\rho$, получаем

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho\,,$$

т.е. уравнение (2.31.1).

Чтобы записать в четырехмерной форме вторую (однородную) пару уравнений Максвелла, введем тензор 3-го ранга

$$R_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}\,. \tag{2.35}$$

Поскольку $F_{ki} = -F_{ik}$, то R_{ikl} полностью антисимметричен, т.е. меняет знак при перестановке любой пары индексов. Поэтому из $64 = 4^3$ компонент тензора независимы только 4. В качестве независимых можно взять любые четыре компоненты, которые имеют различные индексы и которые не могут быть получены друг из друга перестановкой индексов, например, $R_{123}, R_{012}, R_{013}, R_{023}$. Оказывается, что с помощью введенного тензора вторая пара уравнений Максвелла может быть записана как

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0\,. \tag{2.36}$$

При $i = 1,\ k = 2,\ l = 3$ отсюда получаем

$$-\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,,$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,.$$

Три других независимых уравнения из (2.36) эквивалентны (2.31.4).

Таким образом, при переходе к другой инерциальной системе отсчета преобразуются координаты и поля, однако вид уравнений электродинамики, в том числе уравнений Максвелла, остается неизменным. Свойство ковариантности уравнений Максвелла явным образом видно из уравнений (2.34), (2.36), которые связывают величины, одинаковым образом преобразующиеся при изменении системы отсчета.

Уравнения Максвелла в форме (2.34), (2.36) записаны как уравнения на тензор электромагнитного поля, в который компоненты векторов **E** и **B** входят на равных правах. Таким образом, свойства поля характеризуются не двумя векторами, а одним антисимметричным тензором, что показывает неразрывную связь электрического и магнитного полей.

Рекомендуемая литература: [2], гл. 11, § 8; [4] § 79.

2.6. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Переход к четырехмерной форме записи законов механики и электродинамики объединяет величины, связь между которыми при трехмерном подходе была не очевидна. Для свободной частицы в один 4-вектор объединились энергия и импульс. Электрическое и магнитное поля в 4-пространстве объединились в тензор электромагнитного поля. Энергия и импульс электромагнитного поля оказываются составляющими тензора, в который, кроме энергии (скаляра в трехмерном случае) и импульса (трехмерного вектора), входит еще и трехмерный тензор натяжений Максвелла. Чтобы ввести тензор энергии-импульса электромагнитного поля, выполним ряд тождественных преобразований с уравнениями Максвелла (2.34), (2.36). Свернем левую и правую части уравнения (2.34) с F_{li} по индексу i:

$$F_{li}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}F_{li}j^i,$$

или, после тождественного преобразования,

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F_{li}F^{ik}\right) - F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}F_{li}j^i. \qquad (2.37)$$

Второй член в левой части разобьем на два равных слагаемых

$$-F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = -\frac{1}{2}\left(F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}\right) \qquad (2.38)$$

и во втором из них переобозначим индексы суммирования $i \rightleftarrows k$. После этого правая часть равенства (2.38) примет вид

$$-\frac{1}{2}\left(F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}\right) = -\frac{1}{2}\left(F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + F^{ki}\frac{\partial F_{lk}}{\partial x^i}\right).$$

Преобразуем последнее выражение, используя антисимметрию тензора электромагнитного поля:

$$-\frac{1}{2}\left(F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+F^{ki}\frac{\partial F_{lk}}{\partial x^i}\right)=-\frac{1}{2}\left(F^{ik}\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+F^{ik}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}F^{ik}\left(\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}\right).$$

Согласно (2.36)

$$\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}=-\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}\,,$$

поэтому

$$-\frac{1}{2}F^{ik}\left(\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}F^{ik}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^l}(F^{ik}F_{ik}).$$

Проведенные преобразования приводят (2.37) к выражению

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F^{ik}F_{li}\right)+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^l}(F^{ik}F_{ik})=-\frac{4\pi}{c}F_{li}j^i,$$

которое представим в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}T^k{}_l=-\frac{1}{c}F_{kl}j^k. \tag{2.39}$$

Здесь введен тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^k{}_l=\frac{1}{4\pi}\left(F^{ki}F_{il}+\frac{1}{4}\delta^k_l F^{mn}F_{mn}\right). \tag{2.40}$$

Запишем (2.39) в контравариантных компонентах:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}T^{kl}=-\frac{1}{c}F^{kl}j_k, \tag{2.41}$$

где

$$T^{kl}=\frac{1}{4\pi}\left(F^{ki}F_i{}^l+\frac{1}{4}g^{kl}F^{mn}F_{mn}\right) \tag{2.42}$$

— тензор энергии-импульса в контравариантной форме.

Записав последнее выражение в виде

$$T^{kl}=-\frac{1}{4\pi}\left(F^{km}F^{ln}g_{mn}-\frac{1}{4}g^{kl}F^{mn}F_{mn}\right), \tag{2.43}$$

убеждаемся, что тензор T^{kl} симметричен, т.е. $T^{kl} = T^{lk}$. С помощью матриц (2.17), (2.18) найдем отдельные компоненты T^{kl}. Величина

$$T^{00} = W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$$

представляет собой плотность энергии электромагнитного поля. Компоненты

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = c\gamma^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

пропорциональны проекциям плотности импульса электромагнитного поля, которая отличается от плотности потока энергии (вектора Пойнтинга) множителем $1/c^2$:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{c^2}\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EB}].$$

Пространственные компоненты тензора энергии-импульса,

$$T^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}[E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\delta_{\alpha\beta}], \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

образуют максвелловский тензор натяжений (расположение индексов у трехмерного тензора безразлично: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}$). Выпишем для наглядности тензор энергии-импульса в явном виде:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \dfrac{E^2+B^2}{8\pi} & \dfrac{[\mathbf{EB}]_x}{4\pi} & \dfrac{[\mathbf{EB}]_y}{4\pi} & \dfrac{[\mathbf{EB}]_z}{4\pi} \\ \dfrac{[\mathbf{EB}]_x}{4\pi} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \dfrac{[\mathbf{EB}]_y}{4\pi} & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \dfrac{[\mathbf{EB}]_z}{4\pi} & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Входящий в правую часть уравнения (2.41) 4-вектор

$$\frac{1}{c}F^{ki}j_k = (\mathbf{jE}/c, \rho\mathbf{E} + [\mathbf{jB}]/c)$$

есть плотность четырехмерной силы Лоренца. Его можно представить в виде 4-дивергенции

$$\frac{1}{c}F^{ki}j_k = \frac{\partial}{\partial x_k}T^{ik}_{part}, \tag{2.45}$$

где T^{ik}_{part} есть тензор энергии-импульса частиц (явный вид которого см., например, в [1]). Подставляя (2.45) в (2.41), получим (тензор энергии-импульса электромагнитного поля обозначим здесь как T^{ik}_{field}):

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T^{ik}_{field} + T^{ik}_{part}) = 0.$$

Равенство нулю дивергенции тензора $T^{ik}_{field}+T^{ik}_{part}$ свидетельствует о сохранении связанных с ним величин — энергии и импульса системы «поле+частицы» — подобно тому, как уравнение непрерывности (2.3) для плотности 4-тока обеспечивает сохранение полного заряда системы.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 9; [2], гл. 11, § 8; [3] § 33; [4] § 89.

2.7. Функции Лагранжа и Гамильтона заряда в электромагнитном поле

Уравнения электродинамики с самого начала удовлетворяли принципу относительности Эйнштейна, поэтому их можно было переписать в явно ковариантной форме. Уравнения ньютоновской механики приблизительно верны лишь при малых скоростях и должна быть исправлены, чтобы удовлетворять принципу относительности. Выше (разд. 1.6) рассматривался вопрос о релятивистской механике свободной частицы, уравнение движения для которой

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=0\,, \quad \mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

Уравнение движения частицы в поле должно содержать в правой части силу, действующую на частицу. Как показывает опыт, для электромагнитного поля такой силой является сила Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\,. \tag{2.46}$$

Следует подчеркнуть, что уравнения движения релятивистской механики не выводятся из более общих положений, а являются результатом обобщения опытных данных. Но возможны различные формулировки механики. Так, лагранжев подход основан на принципе наименьшего действия, который позволяет получить уравнения движения варьированием интеграла действия.

Найдем функцию Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле, которая будет приводить к уравнению движения (2.46). Интеграл действия для заряда в поле отличается от действия для свободного заряда (1.37) дополнительным слагаемым S_{int}, описывающим взаимодействие частицы с полем:

$$S=-mc^2\int\limits_{t_a}^{t_b}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt+S_{\text{вз}}\,.$$

Действие $S_{\text{вз}}$ должно удовлетворять следующим очевидным свойствам:
а) быть релятивистским инвариантом — для того чтобы был выполнен принцип относительности; б) содержать величины, характеризующие поле. В качестве характеристики поля можно взять четырехмерный потенциал

$A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, который должен входить в $S_{\text{вз}}$ линейно, чтобы выполнялся принцип суперпозиции. Всем указанным выше требованиям удовлетворяет $S_{\text{вз}}$ в виде $\int_a^b A^i dx_i$. Принимая во внимание, что взаимодействие частицы с полем пропорционально величине заряда, запишем

$$S_{\text{вз}} = \alpha e \int_a^b A^i dx_i \,,$$

где α — инвариантная постоянная, а интеграл берется вдоль мировой линии частицы, проходящей через точки a и b. Принимая во внимание, что $dx^i = (cdt, d\mathbf{r})$, $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, перепишем $S_{\text{вз}}$ как интеграл по времени:

$$S_{\text{вз}} = \alpha e \int_{t_a}^{t_b} (c\varphi - \mathbf{vA}) dt \,.$$

Сравним выражение, которое получается отсюда при малых ($v \to 0$) скоростях

$$S_{\text{вз}}\big|_{v \to 0} = \alpha e \int_{t_a}^{t_b} c\varphi dt,$$

с нерелятивистским результатом. При малых скоростях $v \to 0$ можно считать, что на частицу действует только электрическое поле, при этом потенциальная энергия U в классической функции Лагранжа $L^{(\text{кл})} = T - U$ есть

$$U\big|_{v \to 0} = e\varphi \,.$$

Поэтому

$$S_{\text{вз}}^{(\text{кл})}\Big|_{v \to 0} = -e \int_{t_a}^{t_b} \varphi dt \,.$$

Отсюда $\alpha = -\dfrac{1}{c}$ и

$$S_{\text{вз}} = -\frac{e}{c} \int_{t_a}^{t_b} (c\varphi - \mathbf{vA}) dt \,.$$

Теперь из (1.34) находим функцию Лагранжа заряда в поле:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{vA} \,. \tag{2.47}$$

Зная функцию Лагранжа, найдем импульс, энергию и функцию Гамильтона. Импульс заряда в поле (который будем обозначать $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, оставляя обозначение $\mathbf{p}$ за импульсом свободной частицы) есть

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,, \tag{2.48}$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.49}$$

— релятивистский импульс свободной частицы.

Энергия частицы в поле:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \mathbf{v}\boldsymbol{\mathcal{P}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\mathbf{A} + e\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{v}\mathbf{A} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi\,,$$

или

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + e\varphi\,, \tag{2.50}$$

где $\mathcal{E} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ — энергия свободной частицы.

Для энергии и импульса свободной частицы выполняется соотношение (1.88)

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2\,,$$

используя которое вместе с (2.48), (2.50), выразим энергию $\tilde{\mathcal{E}}$ через импульс $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, т.е. найдем функцию Гамильтона

$$H = c\sqrt{\left(\boldsymbol{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2c^2} + e\varphi\,. \tag{2.51}$$

Полученные формулы, справедливые при любых скоростях, упрощаются в нерелятивистском пределе. При $v \ll c$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} \tag{2.52}$$

и

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{v}\mathbf{A}, \tag{2.53}$$

поскольку энергию покоя в нерелятивистской функции Лагранжа можно отбросить как постоянную величину. Нерелятивистские выражения для обобщенного импульса, энергии и функции Гамильтона можно найти или из

(2.49), (2.50), (2.51) с помощью разложения (2.52), или по общим формулам механики из нерелятивистской функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{P}} &= m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,, \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \frac{mv^2}{2} + e\varphi\,, \\ H &= \frac{\left(\boldsymbol{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + e\varphi\,. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Найдем теперь с помощью функции Лагранжа (2.47) релятивистское уравнение движения заряда в электромагнитном поле. Вычислим сначала в уравнении Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{2.55}$$

градиенты от L по $\mathbf{v}$ (см. (2.48)) и по $\mathbf{r}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -e\nabla\varphi + \frac{e}{c}\nabla(\mathbf{vA}) = -e\nabla\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}] + \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} \tag{2.56}$$

(при вычислении градиента от скалярного произведения $\nabla(\mathbf{vA})$ учтено, что $\mathbf{v}$ не зависит от $\mathbf{r}$). Вычисляя полную («субстанциональную») производную по времени, следует иметь в виду, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, так что, например,

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)A_x.$$

Собирая все компоненты, получим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}. \tag{2.57}$$

Подставляя (2.56), (2.57) в уравнение Лагранжа (2.55), получим

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}].$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \qquad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A},$$

убеждаемся, что лагранжев подход (с функцией Лагранжа (2.47)) приводит к релятивистскому уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vB}], \qquad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tag{2.58}$$

совпадающему с (2.46).

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 8; [2], гл. 11, § 14; [3] § 16, 17.

2.8. Уравнение движения заряда в ковариантной форме

Релятивистское уравнение движения частицы в электромагнитном поле (2.58) может быть переписано в четырехмерных обозначениях (точно так же, как были переписаны в явной ковариантной форме уравнения электродинамики). Из (2.58) нетрудно понять, что слева в четырехмерном уравнении должна стоять производная $\dfrac{dp^i}{d\tau}$. Напомним, что

$$d\tau = ds/c = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt$$

— скалярная величина (собственное время), так что $\dfrac{dp^i}{d\tau}$ — 4-вектор. Правая часть в уравнении движения тоже должна содержать 4-вектор, который, как ясно из ее вида, линеен по $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ и зависит от $\mathbf{v}$. Учитывая, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ входят в тензор F^{ik}, а $\mathbf{v}$ — в 4-вектор u^i, запишем уравнение движения в виде

$$\frac{dp^i}{d\tau} = aF^{ik}u_k\,. \qquad (2.59)$$

Константу a найдем, рассматривая предел малых скоростей $v \to 0$. При этом $d\tau \to dt$, а

$$u_k = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, -\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \to (c, 0, 0, 0).$$

Поэтому (см. (2.18))

$$F^{ik}u_k \to F^{i0}c = \begin{cases} 0, \ i = 0; \\ cE_i, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Итак, в пределе $v \to 0$ из (2.59) получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = ac\mathbf{E}.$$

Но в пределе малых скоростей на заряд действует только электрическая сила $e\mathbf{E}$, так что

$$ac = e, \quad a = \frac{e}{c}.$$

Окончательно уравнение движения в ковариантной форме есть

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k\,. \qquad (2.60)$$

Обратим внимание, что (2.55) содержит три уравнения в проекциях, а (2.60) — четыре. Выясним, что означает уравнение, связанное с временно́й компонентой. Положим $i = 0$, тогда

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \,,$$
$$F^{0k} u_k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) = \frac{\mathbf{E}\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,.$$

Отсюда получаем
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} = e\mathbf{F}\mathbf{v} \,. \tag{2.61}$$
Это уравнение, связывающее изменение энергии частицы с работой силы, есть следствие уравнений движения (трех других уравнений из (2.60)). Оно справедливо и в нерелятивистской механике.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 9; [4] § 85.

Список литературы

1. Бредов М. М. Классическая электродинамика / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. — СПб. : Лань, 2003. — 398 с.

2. Запрягаев С. А. Электродинамика / С. А. Запрягаев. — Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. — 536 с.

3. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Физматлит, 2003. — 530 с.

4. Терлецкий Я. П. Электродинамика / Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков. — М. : Высш. шк., 1990. — 352 с.

5. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. — М. : Наука, 1977. — 384 с.

Учебное издание

Мармо Сергей Иванович,
Фролов Михаил Владимирович

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть II

Специальная теория относительности
и электромагнитные явления

Учебное пособие для вузов